En cheminant avec Kakeya

Un voyage au cœur des mathématiques actuelles

Vincent Borrelli **et** **Jean-Luc Rullière**

CC BY NC ND

Table des matières

1 Une question anodine ? 1

La question de Kakeya 2

La grande invention 7

2 La dérivation 11

Qu'est-ce qu'une dérivée ? 12

La découverte de Descartes 18

Avancée sur la question de Kakeya 21

Le théorème d'Archimède 23

3 Le calcul intégral 31

Le partage d'Archimède 34

Qu'est-ce qu'une intégrale ? 36

Avanc é e sur la question de Kakeya 39

Le paradoxe du peintre 40

4 La formule de Stokes 49

La méthode l'arpenteur 51

La formule de Stokes 52

Avancée sur la question de Kakeya 56

Bulles de savon 58

5 Les équations différentielles 65

La deltoïde 66

Enveloppe de droites 68

Avancée sur la question de Kakeya 70

Billards 75

6 Le théorème de Besicovitch 83

Le problème de Kakeya pour les aiguilles parallèles 85

La construction de Besicovitch 86

L'énigme des domaines étoilés 91

7 La conjecture de Kakeya **95**
Le monde des objets d'aire nulle 97
Une nouvelle jeunesse pour la question de Kakeya 101
La conjecture de Kakeya 105

8 Perspectives **109**
De Kakeya aux nombres premiers 110
L'approche de Bourgain 116

Une question anodine ?

Les mathématiques sont une composante active de la pensée humaine, elles prennent racine dans la nécessité où nous nous trouvons de connaître et de comprendre le monde où nous vivons et d'accéder aux mécanismes secrets qui président à sa mystérieuse harmonie. Elles permettent, par le seul travail de l'esprit, de repousser toujours plus loin les limites de l'univers connu et proposent, en demandant de s'abstraire de la réalité sensible, une voie pour atteindre à la raison première des choses. Elles sont, en outre, d'une extraordinaire efficacité qui n'a cessé au cours de l'histoire d'étonner les plus grands esprits. Albert Einstein se demandait par quel prodige « la mathématique, qui est un produit de la pensée humaine et qui est indépendante de toute expérience, s'adapte d'une si admirable manière aux objets de la réalité ». Que les conclusions d'un pur travail de l'esprit humain puissent prendre vie dans le monde qui nous entoure est à la fois un des grands mystères et une des justifications de l'activité mathématique.

Les mathématiques sont souvent perçues comme un travail très rigoureux qui se résume essentiellement en une désespérante manipulation d'équations. En réalité il s'agit avant tout d'un travail intellectuel mêlant intuition et raisonnement plutôt que d'un déroulement sans imagination de règles algébriques. Comment percer en effet le plus petit mystère sans intuition, et comment s'assurer de la véracité de sa pensée sans raisonnement ? L'imagination

et le raisonnement sont donc les deux facettes de l'activité mathématique, et c'est de leur combinaison que jaillit la réponse aux grandes énigmes. Le fruit de cette combinaison est ce que les mathématiciens appellent une *démonstration*. C'est un cheminement logique qui, partant de faits considérés comme vrais, se développe au moyen d'une suite de déductions pour aboutir à la conclusion espérée. Une affirmation étayée par une démonstration interdit définitivement toute contradiction, elle acquiert le statut de fait mathématique et pourra à son tour s'intégrer dans d'autres démonstrations. Au contraire, une affirmation qui en est exempte n'a pas d'utilité effective, c'est pourquoi les mathématiciens attachent un intérêt primordial à la recherche de démonstrations.

En général, une question étant posée, il est très difficile de découvrir ce fameux cheminement qui mène à la solution, ceci explique pourquoi de nombreuses questions très anciennes demeurent encore en suspens. Confronté à de telles questions, le mathématicien n'a souvent d'autre choix que de s'intéresser à des cas particuliers ou des questions annexes plus accessibles. Ces questions particulières, qui peuvent paraître bien anecdotiques, offrent parfois, l'Histoire l'a montré, des lumières décisives sur les questions les plus générales. Ce passage du particulier au général n'est pas propre aux mathématiques et se rencontre dans tous les savoirs. A cet égard, la légende selon laquelle une simple pomme tombant de son arbre aurait inspiré à Isaac Newton les grands principes de la gravitation universelle, est révélatrice de la fécondité attribuée à cette démarche. De façon plus avérée, c'est bien l'observation de colonies de pinsons très particulières à certaines îles des Galapagos, qui a suggéré à Darwin sa théorie générale de l'évolution des espèces.

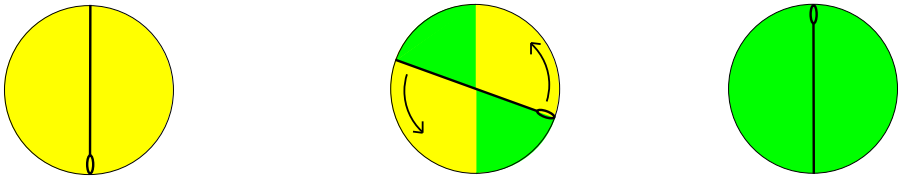
Face à une question, qu'elle soit annexe ou fondamentale, le savant est confronté à deux situations : il peut avoir une conviction intime de la réponse, sans être capable de la démontrer, ou au contraire, n'avoir aucune idée de celle-ci. Bien entendu, son travail est grandement facilité s'il se trouve dans le premier cas ; autrement dit, lorsqu'il dispose en ligne de mire d'une idée de la réponse qui soit suffisamment fondée pour servir de guide à la démonstration. Cette idée, ce moyen terme entre la question et la réponse s'appelle une *conjecture*, c'est une réponse plausible, une réponse en suspens, en attente d'une démonstration. Cette attente peut être longue – parfois plusieurs siècles – et de très nombreuses conjectures demeurent encore aujourd'hui sans réponse, c'est l'une d'entre elles, la *conjecture de Kakeya*, qui nous accompagnera tout au long de cet ouvrage.

La question de Kakeya

L'histoire de cette conjecture débute par une question si simple d'apparence que la réponse semble aller de soi. Mais les apparences sont trompeuses. Loin d'être évidente cette question s'avère en réalité riche et profonde, et pour peu qu'on se laisse guider, son exploration conduit au cœur des mathématiques les plus modernes. Cette question « si simple » a été posée pour la première fois au début du XX$^{\text{ème}}$ siècle par le mathématicien japonais Sôichi Kakeya :

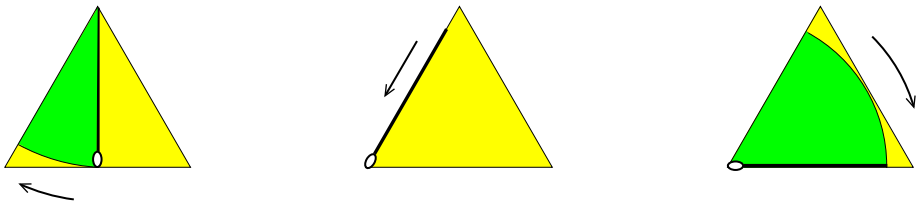
Quelle est la plus petite surface à l'intérieur de laquelle il est possible de déplacer une aiguille de manière à la retourner complètement ?

De façon plus concrète, c'est comme si Kakeya, considérant une aiguille posée devant lui sur sa table de travail, se demandait comment dessiner la plus petite zone possible à l'intérieur de laquelle il pourrait faire glisser cette aiguille jusqu'à ce qu'elle se retrouve dans sa position initiale, la tête prenant la place de la pointe. La première réponse qui vient à l'esprit est le disque dont l'aiguille serait le diamètre et qu'une simple rotation suffirait alors à renverser complètement.



Aussi surprenant que cela puisse paraître cette solution élégante et simple ne répond pas à la question de Kakeya : il existe d'autres façons de déplacer l'aiguille qui balaient de plus petites surfaces. Par exemple au lieu de faire tourner l'aiguille autour de son centre, on lui fait effectuer des rotations successives autour de ses extrémités. Une figure se dessine alors d'elle-même : le triangle de Reuleaux.

Un calcul rigoureux de l'aire de cette figure montre qu'elle est plus petite que celle du disque (ce calcul est proposé dans l'encart coloré de la page suivante). Ainsi la figure que l'on pressent naturellement – le disque – n'est pas la solution au problème de Kakeya. Il se trouve que le Reuleaux ne l'est pas davantage, on peut en effet retourner une aiguille dans un triangle équilatéral dont l'aire est plus petite que celle du Reuleaux. Les dessins ci-dessous donnent l'idée du mouvement de l'aiguille à l'intérieur d'un tel triangle.



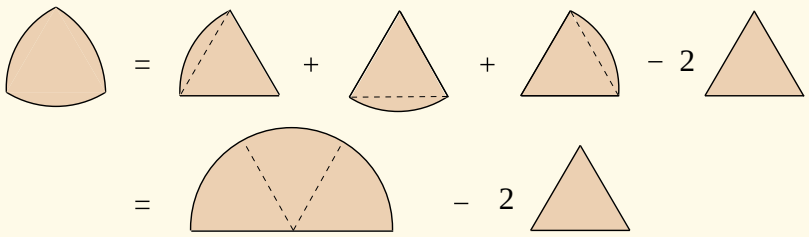
Le triangle est-il lui-même la bonne solution au problème de Kakeya ? Difficile d'en être sûr car dès que l'on découvre une figure susceptible de répondre au problème, il est tou-

Le triangle de Reuleaux et le triangle équilatéral

Il est facile de montrer au moyen d'un calcul d'aire que le Reuleaux est plus petit que le disque. Bien sûr ce calcul n'aura de sens que si l'on fixe la même longueur pour l'aiguille dans le Reuleaux et dans le disque. Pour simplifier les calculs on décide que cette longueur est égale à 1 (on ne considère pas d'unité particulière, par exemple ce 1 peut signifier 1 mètre, 1 pied, 1 pouce, 1 mile, bref ce que l'on veut). Le disque ayant pour diamètre l'aiguille a donc un rayon égal à $\frac{1}{2}$, l'aire de ce disque, qui s'écrit πR^2, vaut donc :

$$\pi \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{4} = 0.78539...$$

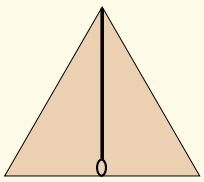
Il peut sembler plus délicat de déterminer l'aire du Reuleaux, toutefois on peut aisément décomposer cette figure en formes élémentaires dont l'aire est bien connue.



Ici, la décomposition fait apparaître un demi-disque d'aire $\frac{\pi}{2}$ et deux triangles équilatéraux de côté 1 dont chacun a une aire égale à $\frac{\sqrt{3}}{4}$, l'aire du Reuleaux est donc :

$$\frac{\pi - \sqrt{3}}{2} = 0.70477...$$

Cette aire est effectivement plus petite que celle du disque.



Quant à l'aire d'un triangle équilatéral, c'est le quotient du carré de sa hauteur par le nombre $\sqrt{3}$, elle vaut donc ici :

$$\frac{1^2}{\sqrt{3}} = 0.57735...$$

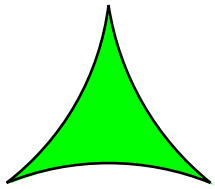
ce qui est bien inférieur à 0.70477.

jours à craindre qu'une autre, plus petite, ne fournisse un meilleur candidat. Kakeya s'est d'ailleurs trouvé confronté, en son temps, à cette difficulté et ne parvenant pas à la dépasser il décida de proposer cette question à l'ensemble des mathématiciens. C'est là une démarche naturelle pour les scientifiques que de présenter leurs résultats et soumettre les questions non résolues au reste de la communauté. Cet échange entre savants qui se fait par l'intermédiaire de revues scientifiques est particulièrement intense puisque ce sont, de nos jours, plusieurs centaines de milliers de résultats et de questions qui sont ainsi publiés chaque année pour ce qui concerne les seules mathématiques. Le destin de toutes ces questions est très inégal, la plupart d'entre elles sont presque aussi vite oubliées que résolues, d'autres, si elles ne sont pas oubliées, ne dépassent cependant pas le cadre d'une communauté restreinte de spécialistes, enfin une infime minorité mobilise l'attention de nombreux mathématiciens et atteint le statut de « grande question ». Certaines de ces grandes questions sont devenues célèbres, le lecteur aura certainement entendu parler, par exemple, du problème de la quadrature du cercle. Il se souviendra peut-être qu'il y est question, partant d'un cercle, de tracer à la règle et au compas un carré qui occupe la même surface. Ce problème, dont il est fait mention dans un papyrus datant de 1650 avant J.-C., a suscité au cours des âges les efforts de très nombreux mathématiciens. Il ne fut finalement résolu qu'à la fin du XIX$^{\text{ème}}$ siècle et la solution est surprenante : un tel tracé est impossible. C'est pourquoi l'expression « quadrature du cercle » a été adoptée dans le langage courant pour désigner quelque chose d'irréalisable. L'impossibilité de la quadrature du cercle révèle que, même si le cercle et la droite sont à la source de toute la géométrie élémentaire, la construction de certaines figures échappe à l'utilisation de ces deux formes pures, chères à Platon.

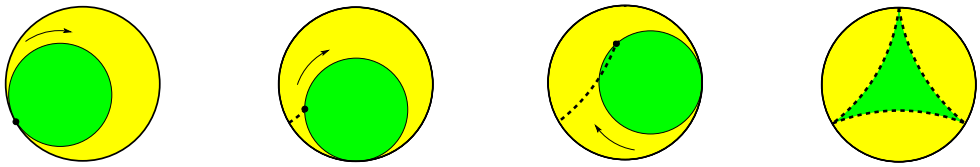
Ces grandes questions, outre leur intérêt propre, agissent comme des points de repère pour l'ensemble de la communauté : elles annoncent et délimitent clairement ce qui est considéré comme étant à la fois fondamental et difficile. D'ailleurs les mathématiciens se réunissent périodiquement afin d'en proposer de nouvelles. L'exemple le plus célèbre fut le congrès de Paris en 1900 où David Hilbert – qui était sans doute, avec Henri Poincaré, le plus grand mathématicien de son temps – proposa une liste de vingt-trois « grandes questions » qui eurent une profonde influence sur toutes les mathématiques du XX$^{\text{ème}}$ siècle. Sur ces vingt-trois problèmes, cinq restent encore en suspens et font toujours l'objet de recherches en ce début de XXI$^{\text{ème}}$ siècle. À l'occasion du passage au troisième millénaire, un congrès exceptionnel s'est tenu lieu à Paris, où de nouveau une liste de problèmes a été proposée. Mais, autres temps autres mœurs, chacun de ces problèmes a été assorti d'un prix d'un million de dollars offert par la fondation Clay à qui les résoudra.

On l'aura compris, les difficultés que recèlent ces grandes questions sont considérables, la première d'entre elles, et non la moindre, étant qu'en général il n'y a pas de fil directeur qui puisse guider le mathématicien dans sa recherche de solution. Toute proportion gardée c'est le même type de difficulté que l'on rencontre avec le problème de Kakeya : le champ des figures possibles semble infini et rien n'est là qui nous indique le chemin à suivre. Dans ces conditions le mathématicien va tout d'abord explorer un grand nombre de fig-

ures afin de se donner un premier panorama du vaste territoire des solutions possibles et acquérir une expérience des formes les plus concluantes. Dans ces choix le mathématicien privilégiera souvent celles ayant les plus belles propriétés, il sera sensible aux figures les plus symétriques et à celles dont la construction semble le plus en harmonie avec le problème posé. Mais toute autre raison indirecte donnant à penser qu'une figure est la bonne peut aussi entrer en considération. Une fois trouvée une telle figure, il en fait son candidat favori et cherche ensuite à *démontrer* que celui-ci est effectivement la solution du problème. Il se trouve que Kakeya avait un tel candidat en tête : il s'agissait d'une courbe classique des mathématiques qui a la forme d'un triangle courbé et qui est appelée *deltoïde* en raison de sa ressemblance avec la lettre Δ (delta) de l'alphabet grec.

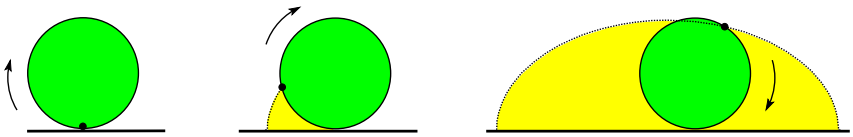


Contrairement au triangle de Reuleaux les côtés de cette deltoïde ne sont pas des arcs de cercles mais des courbes plus complexes obtenues à partir de cercles en mouvement. Précisément, elles apparaissent lorsque l'on suit le trajet d'un point sur un cercle roulant à l'intérieur d'un autre cercle une fois et demi plus grand. Le rapport de trois pour deux entre les diamètres des cercles force la figure obtenue à présenter trois pointes.



Les courbes complexes qui délimitent la deltoïde font surgir une difficulté : outre qu'elles ne sont pas aussi familières que la droite ou le cercle, elles ne répondent pas aux formules élémentaires de calcul d'aire telles qu'on les connaît pour le disque ou le triangle par exemple. Et si l'on ne connaît pas l'aire de la deltoïde il devient difficile de la comparer à celle d'autres figures et donc, *in fine*, d' être capable de montrer qu'il s'agit bien de la solution au problème de Kakeya. Bien entendu ce problème ne s'arrête pas à la deltoïde : toute autre figure permettant la rotation de l'aiguille n'a aucune raison de posséder des côtés droits ou circulaires et par conséquent la détermination de son aire sera problématique. Plus généralement c'est à la question de la compréhension des courbes que l'on se trouve confronté ici : puisqu'une figure se résume aux courbes qui la délimitent, une connaissance approfondie de ces courbes doit suffire pour répondre non seulement à la question de l'aire mais aussi à toute autre question géométrique. Jusqu'à une époque relativement récente, cette connaissance approfondie des courbes n'était pas accessible. Au début du XVII$^{\text{ème}}$ siècle d'immenses mathématiciens comme René Descartes, Pierre de Fermat ou encore

Blaise Pascal se heurtaient quotidiennement à des problèmes de calcul d'aire relatifs à ce type de courbes. Un des problèmes réputés comme faisant partie des plus difficiles de l'époque était justement de trouver l'aire d'une figure du m ême type que la deltoïde, appelée *cycloïde*.



Dans cette figure, le petit cercle au lieu de rouler dans un cercle plus grand, se déplace tout simplement sur une droite. Comme pour la deltoïde ce mouvement engendre un trajet qui n'est ni une droite ni un cercle mais bel et bien une ligne courbe pour laquelle un véritable problème de calcul d'aire se pose. Bien des efforts, et beaucoup de génie, ont permis de mener ce calcul à bien en 1634, sans qu'aucune méthode systématique n'émergeât : il manquait la grande notion unificatrice qui permettrait une réelle compréhension des courbes. C'est cette grande notion que nous découvrirons au fil des pages, dans notre pérégrination autour du problème de Kakeya.

La grande invention

A la fin du XVII$^{\text{ème}}$ siècle une grande invention voit le jour : le très fameux *calcul différentiel*, inventé indépendemment par les deux plus grands savants de l'époque : Isaac Newton et Gottfried Leibniz. Ce calcul différentiel, ou encore *analyse des infiniments petits* comme on l'appelait alors, ouvre non seulement à la compréhension des courbes mais aussi à celle, plus concrète, du mouvement des corps, qu'il se produise sur Terre ou dans l'espace. Autrement dit, il permet tout à la fois de répondre aux questions de calcul d'aire et aux préoccupations des astronomes désireux de connaître la course des objets célestes. Plus encore, le calcul différentiel s'est révélé être le langage universel avec lequel s'écrivent les lois de la nature, l'exemple le plus célèbre étant la loi de la gravitation de Newton. Avec cette invention on commence à comprendre véritablement les phénomènes naturels. Pour la première fois on est en mesure d'aborder les problèmes qui concernent le mouvement et plus généralement, les phénomènes qui évoluent au cours du temps. C'est une révolution : on passe d'une science de la statique à une science de la dynamique.

On a peine à imaginer de nos jours l'engouement extraordinaire que cette découverte a pu susciter dans le monde érudit. Des personnalités aussi différentes que Fontenelle ou Buffon se passionnent pour cette invention ; la marquise du Châtelet, maîtresse de Voltaire, publie une impressionnante traduction des *Principia*, l'ouvrage fondateur de Newton. Même Bougainville, le célèbre navigateur, est reçu à 25 ans à la Royal Society pour un ouvrage remarquable sur le sujet. Tous sont unanimes pour célébrer la grandeur de cette découverte, Buffon parle de « sublime Méthode », Voltaire de « vérité sublime » et le marquis de l'Hospital, auteur du tout premier ouvrage en français sur le calcul différentiel, parle dans

Le remarquable traité de Maria Agnesi (portrait en tête de chapitre)

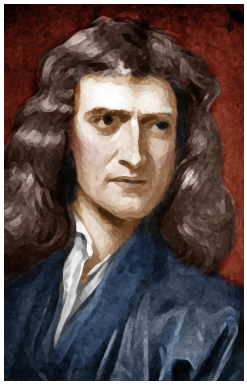
Le premier des ouvrages à populariser le calcul différentiel est celui du marquis de l'Hospital. Il est écrit en français, la langue savante de l'époque, et porte le titre très éloquent d'*Analyse des infiniments petits pour l'intelligence des lignes courbes*. Ce titre rappelle que c'est la compréhension des courbes qui est en jeu, de celle-ci naîtra celle du mouvement et de tous les phénomènes naturels qui y sont associés. Le livre connaît une grande renommée et une suite lui sera même donnée par le grand explorateur Bougainville. Un autre ouvrage va également connaître un succès immense, celui de Maria Agnesi : *Institutions analytiques à l'usage de la jeunesse italienne*. Ce livre est bien postérieur à celui du marquis de l'Hospital, mais il est le premier à faire la synthèse des idées de Leibniz et de Newton. Il est si remarquablement écrit que le pape Benoît XIV félicita publiquement Agnesi, lui offrit une couronne et une médaille en or et lui proposa même – fait unique pour une femme – un poste de professeur à l'université de Bologne. En réalité ce livre avait été écrit initialement pour l'éducation de ses vingt jeunes frères dont elle s'occupait quotidiennement. Maria Agnesi était en effet d'une intelligence, d'une énergie et d'un dévouement exceptionnels. Sa renommée s'étendait sur toute l'Europe et des savants de tous les pays se pressaient chez la « signora Agnesi » pour avoir la chance de discourir avec elle de philosophie, sciences naturelles, littérature ou mathématiques : l'incroyable étendue de ses connaissances ainsi que sa parfaite éloquence en faisaient un personnage réellement exceptionnel. Elle connaissait sept langues dont le français qu'elle parlait à la perfection depuis l' âge de cinq ans. A 20 ans elle publiait un recueil de philosophie et de sciences naturelles et à 30 ans son fameux ouvrage sur le calcul différentiel. A cette occasion Fontenelle déclara que la candidature de Maria Agnesi à l'Académie des sciences eût été un triomphe... si celle-ci avait pu admettre une femme. En dépit de son immense renommée, elle renoncera aux sciences quelques années plus tard pour entrer dans les ordres. Elle terminera sa vie à aider les malades et les nécessiteux après leur avoir légué tous ses biens.

Les ouvrages du marquis de l'Hospital et de Maria Agnesi peuvent être considérés comme les tout premiers livres de cours sur le calcul différentiel. Bien sûr beaucoup d'autres vont suivre, le calcul différentiel investissant de plus en plus largement toutes les domaines de la science. Aujourd'hui ce dernier est très largement enseigné et on en apprend, dès le lycée, l'opération la plus fondamentale, à savoir la dérivation des fonctions.

son introduction de la « beauté de ce calcul » et de sa force pour s'affranchir de « difficultés qu'on aurait jamais osé tenter auparavant ». Bref, chacun est bien conscient de la révolution que toutes ces idées nouvelles sont en train de provoquer.

Aujourd'hui, plus de 300 ans après, il est très facile de se rendre compte à quel point cet enthousiasme initial était justifié. Non seulement le calcul différentiel a pénétré toutes les branches des sciences, depuis l'astronomie jusqu'aux sciences du vivant, mais il s'est aussi introduit, même si nous n'en avons pas toujours conscience, jusque dans notre vie quotidienne. Par exemple un simple voyage en train peut être l'occasion d'observer une matérialisation inattendue du calcul différentiel. Celle-ci concerne le tracé des voies ferrées qui doit prendre en compte de subtiles contraintes sur la forme des rails, notamment dans la construction des virages. En effet, pour réaliser ces changements de direction on serait tenté de faire succéder à une ligne droite un arc de cercle qui la prolonge. Mais cette solution certes naturelle provoquerait pourtant presque à coup sûr le déraillement du train. Il existe en réalité une forme de rupture invisible dans le passage de la ligne droite à l'arc de cercle même si ceux-ci sont placés dans la plus grande continuité possible. Seul le calcul différentiel permet de mettre en évidence cette rupture et propose des courbes, autres que le cercle, qui s'enchaînent parfaitement à la ligne droite. Ces courbes, en imprimant une grande régularité à la trajectoire du train, assurent tout à la fois le confort des voyageurs et une moindre usure du matériel. Bien entendu cet exemple de la courbure des rails de chemin de fer n'est pas unique et il existe de nombreux autres domaines d'intervention du calcul différentiel dans notre quotidien. En fait toute la technologie actuelle ne peut s'en abstraire : il s'applique très concrètement dans la maîtrise des processus industriels, dans l'optimisation des investissements et des productions, bref partout où il est question de trouver les meilleurs compromis. De façon plus universelle le calcul différentiel est à la source d'une multitude d'idées et de théories nouvelles. Pour ne citer qu'un exemple, il a permis l'émergence d'une nouvelle géométrie, dite *géométrie différentielle*, qui s'est révélée par la suite être le cadre indispensable dans lequel Einstein a pu développer sa fameuse théorie de la relativité générale.

Alors que de grandes avancées de la connaissance humaine comme la loi de la gravitation universelle ou la théorie de l'évolution sont perçues à leur juste valeur, peu de gens connaissent la véritable portée du calcul différentiel. Cette relative méconnaissance s'explique sans doute par la distance qui sépare nécessairement une idée abstraite de la réalité tangible. Le calcul différentiel requiert la maîtrise d'un infini, et par conséquent se place dès le départ dans le domaine de l'abstraction. Son approche n'est donc pas immédiate et demande inévitablement un travail de l'esprit. Il se trouve que le problème de Kakeya fait intervenir les notions de courbe et de mouvement qui sont justement à la base du calcul différentiel. La courbe est celle qui délimite le domaine à l'intérieur duquel l'aiguille se retourne, le mouvement est celui de l'aiguille elle-même dans ce domaine. La question de Kakeya offre donc l'opportunité de découvrir en profondeur la grande invention de Leibniz et de Newton.



La dérivation

La peinture classique associe volontiers sagesse et âge mûr. Par exemple les savants grecs, dont on ne possède aucun portrait d'origine, ont tous été représentés sous les traits de nobles vieillards. Plus proche de nous, les portraits de grands penseurs comme Darwin, Einstein, Freud ou Pasteur donnent à voir des hommes relativement âgés. Il est vrai que la reconnaissance, ainsi que la plupart des récompenses scientifiques, dont le prix Nobel, sont généralement décernées aux savants vers la fin de leur carrière. Pourtant bien souvent les grandes découvertes, en particulier en mathématiques, sont le fait de très jeunes gens. Newton et Leibniz (portrait en tête de chapitre) découvrent le calcul différentiel à l'âge de vingt-trois et vingt-neuf ans respectivement. Et ce ne sont pas des cas isolés. Descartes qui les a précédés n'a que vingt-trois ans lorsqu'il présente son principe de géométrie analytique, et Lindemann en a tout juste trente lorsqu'il démontre à la fin du XIX$^{\text{ème}}$ siècle l'impossibilité de la quadrature du cercle. Plus près de nous, Einstein publie pour la première fois sa théorie de la relativité à l'âge de vingt-six ans. De nos jours, c'est souvent l'apanage de personnes jeunes que d'enlever les questions mathématiques laissées par leurs aînés. Et d'ailleurs, contrairement à ce qui a lieu dans les autres sciences, la plus haute distinction en mathématiques, à savoir la médaille Fields, a été conçue pour récompenser de jeunes personnes : elle ne peut être attribuée qu'à des scientifiques dont l'âge ne dépasse pas quarante ans. Ce prix, créé par le mathématicien Fields, est l'équivalent du prix Nobel en mathématiques. Il est décerné depuis 1936 et récompense tous les quatre ans des

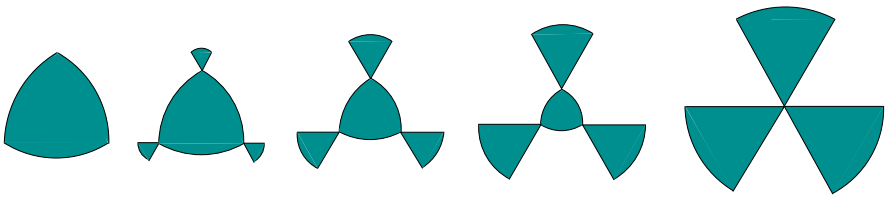
mathématiciens qui ont fait des découvertes de première importance. La moyenne d'âge des lauréats est de 35 ans.

Cette extrême jeunesse s'accompagne presque immanquablement d'une force de travail extraordinaire. L'œuvre complète du philosophe et mathématicien Gottfried Leibniz est si volumineuse que son édition, entreprise au début du XX$^{\text{ème}}$ siècle, n'est toujours pas achevée. Sa correspondance, à elle seule, se compose de 20 000 lettres de sa main et sa publication complète nécessiterait une centaine d'ouvrages. Quant à Newton, vingt ans d'une vie quasi-monacale entièrement dédiés au labeur le conduisirent à une grave dépression nerveuse. Pour prendre un exemple plus actuel, la récente démonstration du grand théorème de Fermat, largement célébrée dans les médias, ne fut obtenue par le mathématicien Wiles qu'au prix de neuf années d'isolement et de travail acharné. Aussi la compétition entre mathématiciens est rude et la primauté d'une découverte âprement disputée. Ce fut le cas de l'invention du calcul différentiel qui fut l'occasion d'un grave conflit entre Newton et Leibniz. Newton en effet découvre le calcul différentiel en 1665 mais ne le publie qu'en 1687, soit 22 ans plus tard. Leibniz de son côté le découvre en 1675, c'est-à-dire dix ans plus tard que Newton, mais le publie presque immédiatement, une dizaine d'années avant Newton. Aurait-il eu vent de la découverte de Newton, lors de son séjour à Londre en 1673 ? Certains l'ont pensé et il naquit chez Newton une féroce animosité envers Leibniz. Néanmoins, il apparaît peu probable que Leibniz ait « volé » sa découverte à Newton. Il est admis aujourd'hui que ce fut indépendamment que ces deux hommes découvrirent le calcul différentiel. A ce propos, si l'on devait absolument attribuer une paternité à cette découverte, il faudrait citer les nombreux autres mathématiciens qui les ont inspirés comme, par exemple, Fermat ou Pascal dont les travaux contiennent tous les germes du calcul différentiel. Leibniz qui est venu aux mathématiques après avoir lu les oeuvres de Pascal, a d'ailleurs déclaré que ce dernier avait eu « les yeux fermés comme par un sort » tant celui-ci touchait au but. En fait, comme cela est souvent le cas en science, cette invention une fois révélée paraît aussi simple et naturelle qu'elle a nécessité de labeur et de réflexion pour être élaborée. Elle est en cela un peu comparable à l'invention du zéro, qui fut en son temps une véritable révolution et qui apparaît aujourd'hui dans toutes sortes de contextes sans même que l'on y prête attention. Ainsi le calcul différentiel apparaît-il, lui aussi, dans d'innombrables situations souvent très éloignées de celles dont se préocupaient Newton et Leibniz. La question de Kakeya peut être l'une de ces situations, elle nous donne l'occasion d'aborder cette grande invention.

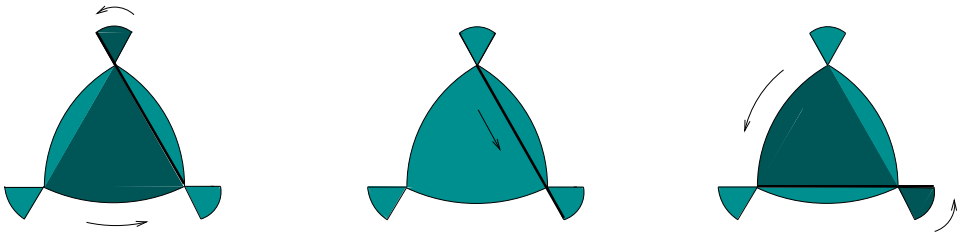
Qu'est-ce qu'une dérivée ?

Le problème de Kakeya s'avère bien plus délicat que la simplicité de son énoncé pouvait le laisser penser. Comment en effet déterminer la plus petite figure dans laquelle on puisse retourner une aiguille alors que le champ des figures possibles est infini ? La grande généralité de l'énoncé de Kakeya autorise en effet la considération des figures les plus diverses et les exemples rencontrés jusqu'à présent ne laissent entrevoir aucun fil directeur pour guider la réflexion. Dans ces conditions une démarche d'essais au coup par coup est assez naturelle et

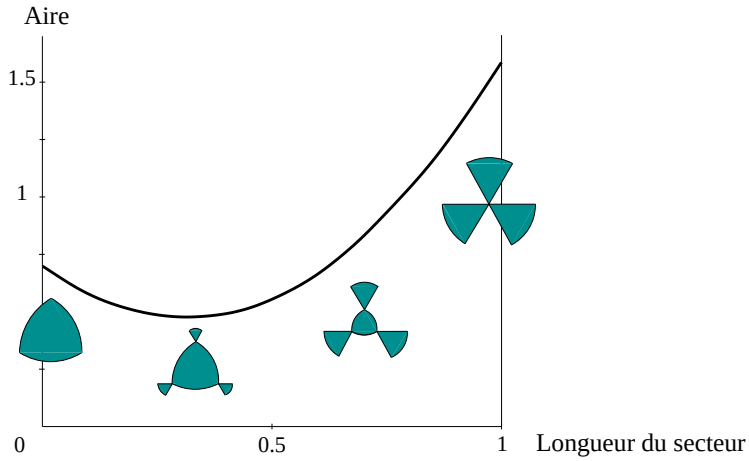
permet d'effectuer une première prise de contact. Un objectif raisonnable est par exemple d'explorer un grand nombre de formes possibles afin de se donner un premier panorama de ce vaste territoire et acquérir une expérience des types de figures les plus concluants. Dans ces conditions, plutôt que de regarder les figures une par une, il est plus judicieux de les regrouper par familles et de les traiter en bloc. L'idée n'est plus de considérer une figure fixe comme un Reuleaux ou un triangle mais de partir d'une figure et de la transformer de façon progressive en une autre. Par exemple, on peut comme ci-dessous, construire à partir du Reuleaux une série de formes géométriques qui permettent toutes le retournement de l'aiguille mais qui occupent des aires différentes sur le plan.



Le Reuleaux se transforme peu à peu en une figure à trois secteurs. Bien entendu il y a une infinité de figures intermédiaires mais on ne peut en représenter que quelques unes et c'est l'imagination qui fait le reste. Chaque membre de cette famille infinie est constitué d'un ensemble de trois « pales » disposées autour d'un Reuleaux central, la totalité rappelant la forme d'une hélice. Bien entendu l'aiguille peut effectuer une rotation complète dans chaque hélice, qu'elle soit située au début ou à la fin de la famille. Les dessins ci-dessous donnent le principe de ce mouvement.



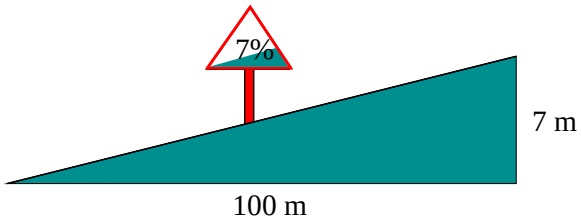
Reste à savoir maintenant quelle « hélice » possède l'aire la plus petite. Pour cela il ne suffit pas de connaître l'aire d'un seul objet mais celles de toute la famille infinie des hélices. Jusqu'à présent on se livrait à des essais sur des figures isolées. Comment maintenant appréhender globalement une situation faisant intervenir une infinité d'objets ? La réponse est étonnmament simple, cette infinité d'objets va se résoudre en une courbe qui matérialisera l'aire de la famille des hélices dans son ensemble. De même qu'à une figure isolée correspond un nombre qui est son aire, à une famille de figures correspond toute une courbe, la courbe des aires, qui représente l'infinité des aires possibles des membres de cette famille.



Cette courbe montre que l'aire des hélices commence par décroître, puis atteint son point le plus bas et se remet ensuite à croître. Le point le plus à gauche de cette courbe donne l'aire du Reuleaux et le plus à droite, l'aire de la figure finale à trois secteurs. Aucune de ces deux figures extrêmes ne possède la plus petite aire de la famille. Cette qualité revient à une figure intermédiaire pour laquelle on peut lire en horizontale sur le dessin une longueur de pale approximativement égale à 0.3. On lit sur l'axe vertical que l'aire de cette hélice vaut environ 0.5. A titre de comparaison, ce nombre est aussi l'aire du carré ayant pour diagonale l'aiguille et dans lequel cette dernière serait bien en peine de faire un demi-tour.

Même si elle constitue un premier pas, cette approche très visuelle n'est cependant pas complètement satisfaisante : la valeur trouvée est lue sur un graphique avec toute l'imprécision que cela suppose. Parmi l'infinité de points qui composent la courbe, lequel précisément représente la plus petite figure et quelle est alors l'aire exacte de cette figure ? Toute la difficulté provient de ce qui fait précisément la force de cette courbe, sa plus petite portion rassemble encore une infinité de figures et cette omniprésence de l'infini se dresse comme un obstacle à une détermination claire de la meilleure d'entre elles. A bien y réfléchir et comme annoncé plus haut, c'est en fait à la question plus générale de la compréhension des courbes que l'on se heurte ici. Or le calcul différentiel est justement le moyen de résoudre cette délicate maîtrise de l'infini et d'accéder ainsi à l'≪ intelligence des lignes courbes ≫ dont parlait le marquis de l'Hospital.

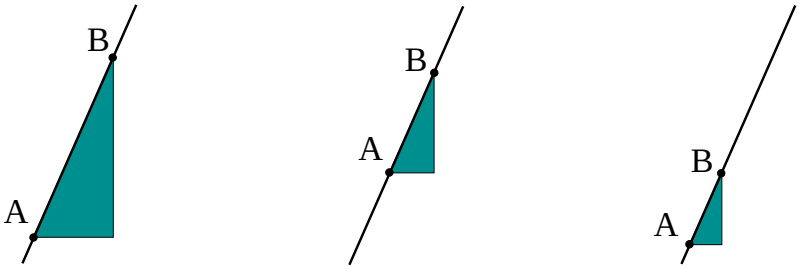
Dans le cas de la courbe des aires, cette « intelligence » doit conduire à la valeur précise du point le plus bas et par conséquent au candidat le plus économe en aire. Comment traduire l'évidence visuelle de ce point le plus bas en une détermination exacte de sa position ? Si l'on chemine par la pensée le long de cette courbe, on commence par descendre jusqu'au point fatidique à partir duquel on entame une remontée, comme aurait pu dire La Palice le point le plus bas de la courbe est l'endroit où la courbe ne descend plus et ne monte pas encore. Nous avons donc besoin de quelque chose qui indique en chaque point de la courbe si on est en train de monter ou de descendre, on peut même être un peu plus exigeant et demander à ce « quelque chose » de mesurer l'importance de cette montée ou de cette descente, c'est-à-dire de donner, pour chaque point, un nombre qui soit d'autant plus grand que la courbe en ce point est pentue. Ce nombre que l'on cherche à extraire de chaque point de la courbe ressemblerait dans l'esprit à celui que l'on rencontre dans la vie de tous les jours sur les panneaux de signalisation routière et que l'on appelle *la pente*.



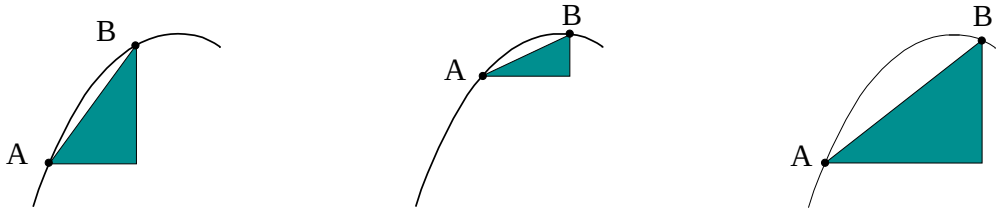
Une pente de 7%, c'est-à-dire de $\frac{7}{100}$, signifie qu'à un déplacement horizontal de cent mètres correspond un déplacement vertical de sept mètres. Bien entendu pour mesurer cette pente, il n'est pas nécessaire de parcourir une distance de cent mètres, n'importe quel déplacement suffit, par exemple un déplacement de 50 mètres correspond en verticale à une montée de 3,5 mètres. La pente sera tout simplement le quotient du déplacement en verticale par le déplacement en horizontale. En mathématique, contrairement aux panneaux de signalisation routière, on fait la différence entre une route montante comme celle représentée ci-dessus, et une route de même inclinaison mais qui serait descendante, auquel cas on affecte la pente d'un signe négatif. De plus, comme la route figure naturellement une droite on préfère parler de la *pente d'une droite*. Cette pente ne dépend pas de l'endroit où on la mesure : si l'on place deux points A et B sur une droite le rapport entre leurs écarts, en verticale et en horizontale, est toujours le même. Ce fait bien évident n'est qu'une déclinaison du fameux théorème de Thalès. On écrit :

$$\text{Pente de la droite } = \frac{\text{distance verticale de } A \text{ à } B}{\text{distance horizontale de } A \text{ à } B}$$

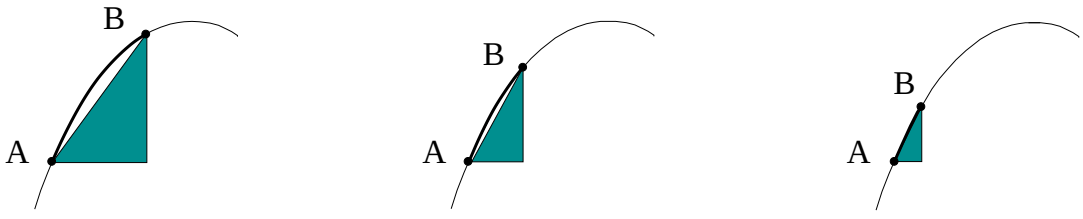
et ceci pour n'importe quels points A et B choisis sur la droite. Cela signifie en particulier que les triangles grisés de l'illustration suivante sont, à grossissement près, tous identiques.



Dans le cas d'une courbe les choses se compliquent, en effet ledit rapport ne sera pas systématiquement le même, sauf à prendre une courbe... en ligne droite. L'exemple qui suit montre d'ailleurs à quel point les triangles qui matérialisent ce rapport peuvent être dissemblables.



Impossible donc de parler, dans l'absolu, de pente pour une courbe comme on peut le faire pour une droite. Comment concilier malgré tout cette notion de pente, telle qu'elle s'offre à nous dans la vie de tous les jours, avec ces courbes que l'on désire étudier ? Comme souvent en mathématiques, c'est une idée simple qui va nous donner la clef. Avant d'en venir à cette idée on peut reconsidérer en détail l'illustration précédente et constater en premier lieu que les triangles grisés seraient moins dissemblables si la courbe ressemblait davantage à une droite. En second lieu, on observe que plus les points choisis sont proches l'un de l'autre, plus la courbe qui les joint ressemble à une droite. L'idée est donc de rapprocher le point B « au plus près » du point A, pour calculer le quotient de la distance verticale sur la distance horizontale :

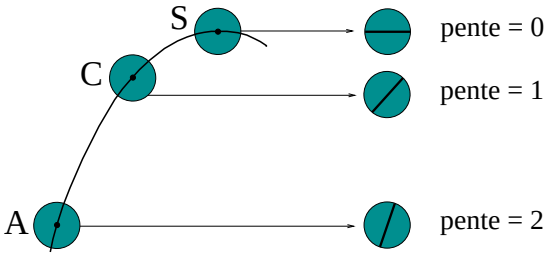


quotient=1.5 quotient=1.75 quotient=1.9

Si on poursuit le déplacement du point B vers le point A, les valeurs 1.99, 1.999, 1.9999 apparaissent, ces nombres se rapprochant aussi près que l'on veut de la valeur 2, on dit que 2 est la *valeur limite* des nombres 1.99, 1.999, etc. et c'est cette valeur limite qui est dite *pente de la courbe au point A*. On abrège ceci par la formule :

$$\text{Pente de la courbe au point } A = \text{limite} \left(\frac{\text{distance verticale de } A \text{ à } B}{\text{distance horizontale de } A \text{ à } B} \right),$$

le mot « limite » signifiant que l'on prend la valeur limite lorsque le point B se rapproche du point A. Tout ceci ne vaut pas seulement pour le point A mais pour chaque point de la courbe. Dans l'illustration ci-dessous le même procédé est appliqué à deux autres points, le point S au sommet de la courbe et un point C intermédiaire. Contrairement à la droite, une courbe n'a pas de pente globale mais une pente en chaque point.



Ainsi à toute droite correspond un nombre appelé pente, qui est conforme à l'idée intuitive que l'on s'en fait : il est d'autant plus élevé que la droite est pentue ; on lui affecte un signe négatif pour différencier la droite « descendante » d'une droite « montante ». Une courbe, quant à elle, possède en chacun de ses points une pente mais celle-ci est plus délicate à évaluer car elle nécessite de déterminer une valeur à la limite en laquelle se résume tout un infini. Une des grandes vertus de cette pente est qu'elle donne une condition précise pour qu'un point soit au plus haut ou au plus bas sur une courbe : il faut que la pente vaille zéro. Par exemple, le sommet noté S ci-dessus, est le point où la courbe ne monte plus et ne descend pas encore, la pente en ce point ne peut donc être ni positive, ni négative, elle est nécessairement égale à zéro. Concernant l'étude du problème de Kakeya, ce raisonnement s'applique tout aussi bien pour le point le plus bas de la courbe des aires : ce point est celui pour lequel la pente de la courbe est égale à zéro. Le problème est donc déplacé, plutôt que de chercher le point le plus bas de notre courbe, on va partir à la recherche d'un point où s'annule la pente. Ce changement de perspective peut sembler bien modeste, pourtant il permet de faire un pas très important puisque l'on passe d'une condition géométrique : le point le plus bas, à une condition numérique : une valeur de pente égale à zéro. Jusqu'à présent on raisonnait sur des objets géométriques, on va maintenant pouvoir faire des calculs.

Reste qu'ici encore on se trouve confronté au problème de l'infini. En effet la courbe des aires se compose d'une infinité de points et il faudrait calculer une infinité de pentes afin de déterminer exactement l'endroit où celle-ci vaut zéro. C'est maintenant que la grande invention de Leibniz et Newton entre en scène : la fameuse *fonction dérivée*. C'est elle

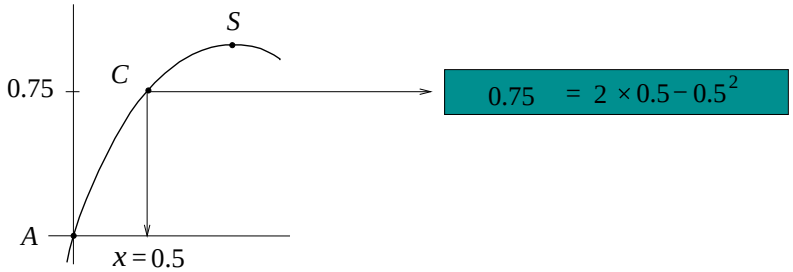
qui, en effectuant l'ensemble infini des calculs de pente d'un seul coup, va permettre de surmonter cette difficulté. En effet cette fonction dérivée embrasse à elle seule toutes les pentes en tous les points de la courbe, en particulier elle donne accès aux points précis où cette pente s'annule. A quoi pourrait bien ressembler une « fonction » capable d'une telle prouesse ? Concrètement elle se présente comme une expression mathématique, c'est-à-dire une formule faisant intervenir une inconnue x et différents symboles mathématiques. On passe donc d'un problème purement géométrique, un problème de courbe et de pentes, à une formule contenant une inconnue. La clef de ce passage tient à l'existence d'un lien caché entre les objets géométriques et les formules mathématiques.

La découverte de Descartes

La mise en évidence de ce lien caché est l'œuvre de René Descartes et elle est aujourd'hui considérée comme l'une des plus grandes découvertes de l'histoire des sciences. Pourtant au début du XVII$^{\text{ème}}$, Descartes lui-même n'accorde que peu d'importance à celle-ci, il s'agit pour lui simplement de présenter de façon plus algébrique la géométrie des anciens. Il faut dire que le projet de Descartes est démesuré, il s'agit de construire rien moins qu'une *mathesis universalis*, une mathématique universelle qui étendrait son pouvoir à tous les domaines de la connaissance humaine. La réalisation de ce projet va occuper une grande partie de sa vie et aboutira, entre autres, à la rédaction du *Discours de la méthode*. Plus prosaïquement il est à l'origine de la notation x, y et z pour les quantités inconnues d'une équation. Il a aussi considérablement simplifié les notations algébriques en éliminant toutes sortes de symboles compliqués et redondants tirés des alphabets grec et hébreu. Sous son influence, l'écriture des expressions mathématiques devient plus cohérente et somme toute assez proche de celle que l'on utilise aujourd'hui : des nombres, des lettres de l'alphabet latin et des opérations algébriques comme la racine carrée. Bien sûr l'œuvre de Descartes ne se limite pas à la science, il fait partie de ces savants à l'esprit universel qui se passionnent aussi bien pour l'optique, l'anatomie ou l'astronomie que pour la philosophie ou la théologie. Il se consacre d'ailleurs pleinement à toutes ses recherches et s'ingÃ©nie à fuir les mondanités qui l'en éloignent. Il mène une vie itinérante commencée à l'âge de vingt ans par une carrière militaire au service de différents duchés, en Hollande puis en Allemagne, mais sa vocation pour les sciences et pour le travail intellectuel s'affirmant de plus en plus il finit par quitter l'armée. Il n'en conserve pas moins ce goût de la mobilité puisqu'on le trouve en l'espace de quelques années résidant en Italie, à Paris, en Bretagne puis de nouveau en Hollande où il s'installe successivement à Franeker, à Amsterdam, à Leyde, à Deventer, à Sandport, à Hardenwijk, à Endegeest et à Egmond de Hoef ! Il meurt à Stockholm auprès de la reine Christine à l'âge de 53 ans.

Dans le domaine des sciences l'apport le plus fondamental de René Descartes demeure sans conteste la célèbre *géométrie analytique*, qui met en correspondance les figures géométriques et les expressions algébriques. La découverte de cette correspondance est le fruit d'une idée toute simple. Descartes remarque que l'objet géométrique le plus élémentaire, le point, peut être repéré par deux nombres qui sont ses coordonnées sur chacun des deux axes.

Une courbe, quant à elle, peut être vue comme une succession de points, elle se traduit par une relation entre ces deux nombres, l'un et l'autre étant reliés par une formule. Il se trouve que pour la courbe que nous avons choisie cette formule est $2x - x^2$.



Le graphique ci-dessus donne le mode d'emploi de cette formule. Le point C est repéré par les deux nombres 0.5 et 0.75 que l'on écrit de manière concise sous la forme $(0.5\,;\,0.75)$, de même A est repéré par $(0\,;\,0)$ et S par $(1\,;\,1)$. Dans ces écritures, le deuxième nombre, c'est-à-dire la verticale, peut toujours s'obtenir à partir du premier précisément au moyen de la formule : il suffit pour cela de remplacer à chaque fois l'inconnue x par la valeur du premier nombre. Il en est ainsi pour tous les points de la courbe, le deuxième nombre est toujours fonction du premier, *via* la formule $2x - x^2$ que l'on appelle par conséquent une *fonction*. On la désigne traditionnellement par la lettre f qui ne représente pas un simple nombre mais une quantité qui dépend de la valeur attribuée à l'inconnue x. Après l'invention de telles fonctions capables de « coder » les courbes, Newton et Leibniz révolutionnent les mathématiques de leur temps par une nouvelle découverte : on peut, à partir d'une telle fonction et par un procédé systématique, trouver la formule qui donne la pente en chaque point de la courbe considérée. Appliqué à la fonction $2x - x^2$, ce procédé systématique (qui sera détaillé plus loin) donne pour la pente la formule :

$$\text{pente } = 2 - 2x.$$

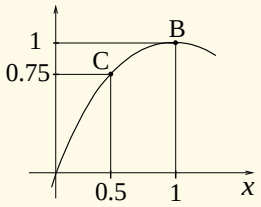
Par exemple, on vérifie que lorsque $x = 0.5$, c'est-à-dire lorsque l'on se trouve sur le point C de la courbe, la pente est $2-2\times 0.5 = 1$. Mais bien sûr cette formule se vérifie également pour tous les autres points de la courbe. Cette écriture $2-2x$ qui donne la pente en chaque point de la courbe est aussi une fonction, on l'appelle *fonction dérivée*, on la note f'.

En fin de compte, si l'inclinaison d'une droite est un simple nombre : sa pente, celle d'une courbe est en revanche toute une fonction : celle qui indique la pente pour chacune des valeurs de x, et qui s'appelle la fonction dérivée. Le procédé qui permet de passer d'une fonction à sa fonction dérivée est en général très simple, en voici un aperçu sur quelques fonctions.

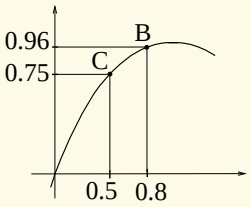
	x	x^2	x^3	x^4	
dérivation	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	et ainsi de suite.
	1	$2x$	$3x^2$	$4x^3$	

De la pente à la fonction dérivée

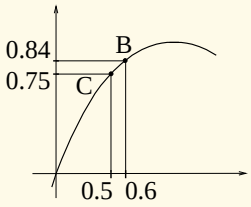
Le passage d'une fonction à sa fonction dérivée n'est pas si mystérieux qu'il n'y para ît. En réalité un raisonnement élémentaire permet de comprendre l'origine des formules de dérivation rencontrées jusqu' à présent. Ce raisonnement est proposé ici pour la courbe figurant dans le texte principal et qui représente la fonction $f = 2x - x^2$. Afin de se familiariser avec ce raisonnement il est d'abord développé dans un cas particulier, celui du calcul de la pente au point C.



$\frac{1-0.75}{1-0.5} = 0.5$



$\frac{0.96-0.75}{0.8-0.5} = 0.7$

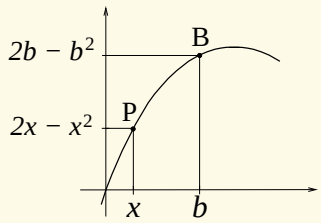


$\frac{0.84-0.75}{0.6-0.5} = 0.9$

Dans le tableau ci-dessous sont portées, pour différentes positions du point B, les valeurs du quotient de la distance verticale par la distance horizontale entre B et C.

position x du point B	1	0.8	0.6	0.51	0.501	0.5001	...	à la limite
valeur du quotient	0.5	0.7	0.9	0.99	0.999	0.9999	...	1

On lit tout au bout du tableau la valeur de la pente au point C, à savoir 1. Au prix d'un petit effort d'abstraction, on peut appliquer la même procédure, non plus au point C mais en un point quelconque P repéré en horizontale par l'inconnue x. Le résultat de cette démarche ne sera plus un nombre mais une expression dépendant de x, qui n'est autre que la fonction dérivée de f.



Le quotient qui donne la pente s'écrit ici :

$$\frac{\text{distance verticale de } P \text{ à } B}{\text{distance horizontale de } P \text{ à } B} = \frac{(2b - b^2) - (2x - x^2)}{b - x}.$$

L'identité : $b^2 - x^2 = (b-x)(b+x)$ permet de simplifier le quotient en : $2 - (b+x)$. Pour obtenir la pente de la courbe au point P il faut rendre b de plus en plus proche de x, à la limite le nombre obtenu est $2 - (x + x)$ c'est-à-dire $2 - 2x$, l'expression de f'.

Une expression qui combine ces puissances de x se dérive ensuite de façon la plus naturelle qui soit, par exemple la fonction $f = 2x - x^2$ se compose des fonctions x et x^2 figurant dans la liste précédente et sa dérivation s'effectue terme à terme :

$$\begin{array}{rccccc} & f & = & 2 \times x & - & x^2 \\ \text{dérivation} \downarrow & & & \downarrow & & \downarrow \\ & f' & = & 2 \times 1 & - & 2x \end{array}$$

On retrouve donc pour la fonction dérivée l'expression $f' = 2-2x$ annoncée précédemment. La connaissance de cette fonction dérivée livre la pente de la courbe en *tous* ses points, elle dénoue, à elle seule, la question de l'infini à laquelle on se heurtait puisque celui-ci est tout entier résumé en la présence de l'inconnue x. En d'autres termes l'infinité de valeurs possibles que l'on peut assigner à x entre en correspondance avec l'infinité des pentes présentes sur la courbe. Au final, la sélection de celui de ses points où la pente est zéro ne résulte plus que d'un petit calcul : la pente $2 - 2x$ s'annule pour la valeur $x = 1$ qui est bien la position en horizontale du point S, le sommet de la courbe.

Avancée sur la question de Kakeya

La géométrie analytique de Descartes révèle un lien profond entre les courbes et les expressions algébriques. Si l'on revient au problème de Kakeya, d'une famille infinie de figures, les hélices, résulte une courbe, celle qui donne leur aire. Pour déterminer la plus petite des hélices, il faut trouver le point le plus bas de ladite courbe et pour cela rechercher l'endroit où la pente vaut zéro. Néanmoins, afin de pouvoir effectuer les calculs il est tout d'abord nécessaire d'appliquer la grande idée de Descartes et faire correspondre à la courbe, son expression algébrique. Dans le cas de la courbe des aires il se trouve que cette expression est la fonction :

$$f = x^2 \times 2.27556... - x \times 1.40924... + 0.70477...$$

Bien sûr cette expression ne doit rien au hasard et découle d'un calcul soigneux qui est évoqué dans l'encart coloré qui suit, l'inconnue x représentant sur la figure la longueur des pales. Il ne reste plus maintenant qu' à suivre la même cheminement que celui présenté plus haut et déterminer la pente en chaque point de la courbe au moyen des règles de dérivation.

$$\begin{array}{rccccccc} & f & = & 2.27556... \times x^2 & - & 1.40924... \times x & + & 0.70477... \\ \text{dérivation} \downarrow & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & f' & = & 2.27556... \times 2x & - & 1.40924... \times 1 & + & 0. \end{array}$$

Cette dérivation ne diffère de celle effectuée plus haut que par la nature des nombres qui composent la fonction f. Ces nombres ne sont plus entiers mais comportent une infinité de chiffres après la virgule ce qui n'affecte en rien le processus de dérivation. D'autre part ce calcul est aussi l'occasion de rencontrer une nouvelle règle de dérivation : un nombre « isolé », tel 0.70477..., se dérive en 0. L'expression de f' qui résulte de ce calcul est donc :

$$f' = x \times 4.551... - 1.409...$$

Comment on calcule l'aire minimale

Une décomposition de l'hélice en figures géométriques élémentaires (un triangle de Reuleaux de hauteur $1-x$ et trois petits secteurs angulaires se réunissant en un demi-disque de rayon x) permet d'obtenir l'expression *exacte* de la fonction qui donne son aire :

$$f(x) = (\pi - \frac{\sqrt{3}}{2})x^2 + (\sqrt{3} - \pi)x + \frac{1}{2}(\pi - \sqrt{3}).$$

Le lecteur ne doit pas être effrayé par les écritures $\pi - \frac{\sqrt{3}}{2}$ ou $\sqrt{3} - \pi$ qui ne sont rien d'autre que des nombres. Une fois évalués, ces nombres conduisent à la formule de l'aire :

$$x^2 \times 2.27556... - x \times 1.40924... + 0.70477...$$

dont on s'est contenté jusqu'à présent. Tout le problème est de trouver la valeur de x pour laquelle la pente de la courbe est zéro. Or la fonction qui indique la pente de la courbe pour chaque position de x étant la fonction dérivée de f, il nous faut donc déterminer f', puis trouver, en résolvant une équation, la valeur de x pour laquelle $f'(x)$ vaut zéro. Appliquons les règles de dérivation vues plus haut :

$$\begin{array}{rccccccc} & f(x) & = & (\pi - \frac{\sqrt{3}}{2})x^2 & + & (\sqrt{3} - \pi)x & + & \frac{1}{2}(\pi - \sqrt{3}) \\ \text{dérivation} \downarrow & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & f'(x) & = & (\pi - \frac{\sqrt{3}}{2})2x & + & (\sqrt{3} - \pi)1 & + & 0 \end{array}$$

Il s'agit ensuite de résoudre l'équation : $f'(x) = 0$, c'est-à-dire :

$$(2\pi - \sqrt{3})x + (\sqrt{3} - \pi) = 0,$$

et l'on aboutit bien au résultat déjà annoncé :

$$x = -\frac{\sqrt{3} - \pi}{2\pi - \sqrt{3}} = 0.30971...$$

Ceci est la valeur exacte de la longueur de chaque extrémité (chaque « pale ») de l'hélice pour laquelle l'aire est la plus petite. En remplaçant x par cette valeur dans l'expression $(\pi - \frac{\sqrt{3}}{2})x^2 + (\sqrt{3} - \pi)x + \frac{1}{2}(\pi - \sqrt{3})$ on obtient l'aire minimale, qui vaut par conséquent :

$$(\pi - \frac{\sqrt{3}}{2})(-\frac{\sqrt{3} - \pi}{2\pi - \sqrt{3}})^2 + (\sqrt{3} - \pi)(-\frac{\sqrt{3} - \pi}{2\pi - \sqrt{3}}) + \frac{1}{2}(\pi - \sqrt{3}).$$

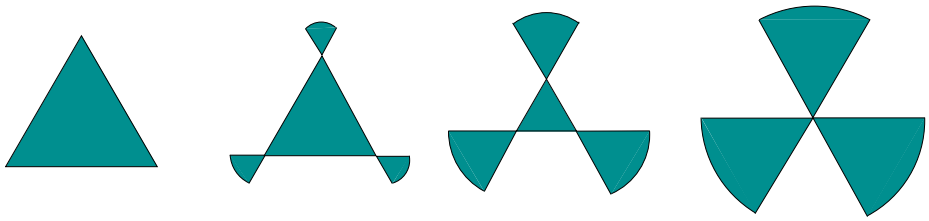
Une simplification de cette expression conduit enfin au résultat :

$$\text{Aire minimale } = \frac{\pi(\pi - \sqrt{3})}{4\pi - 2\sqrt{3}} = 0.48649...$$

Cette expression est égale à zéro lorsque x vaut 0.309... qui est le quotient de 1.409... par 4.551... Ainsi la plus petite aire réalisable avec ce genre de figures a lieu lorsque la longueur de la pale est égale à 0.309... Il suffit ensuite de calculer l'aire de cette hélice grâce à la fonction f pour obtenir enfin :

$$\text{Aire de la plus petite hélice } = 0.48649...$$

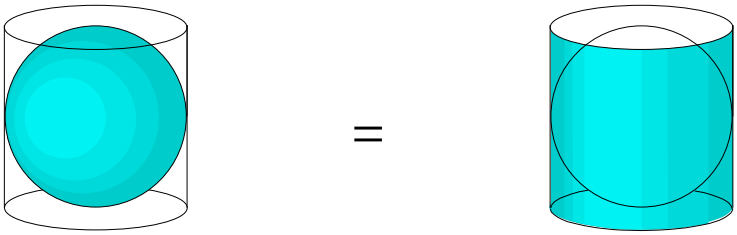
Ce nombre est plus petit que 0.5, l'hélice correspondante est donc effectivement plus petite que le carré qui nous a servi de point de comparaison. Ce résultat est cependant loin d'être définitif, il peut-être amélioré substantiellement en remplaçant, par exemple, la famille des hélices par celle des hélices triangulaires, celles dont la partie centrale est un triangle équilatéral :



La mise en œuvre de la démarche précédente pour cette nouvelle famille nous apprend que l'aire minimale vaut 0.42217... A titre de comparaison l'aire de la deltoïde est de 0.39269... Autrement dit, à condition de choisir ses dimensions avec pertinence, l'hélice triangulaire qui est une figure très simple composée exclusivement de droites et de cercles parvient presque à égaler la deltoïde chère à Kakeya.

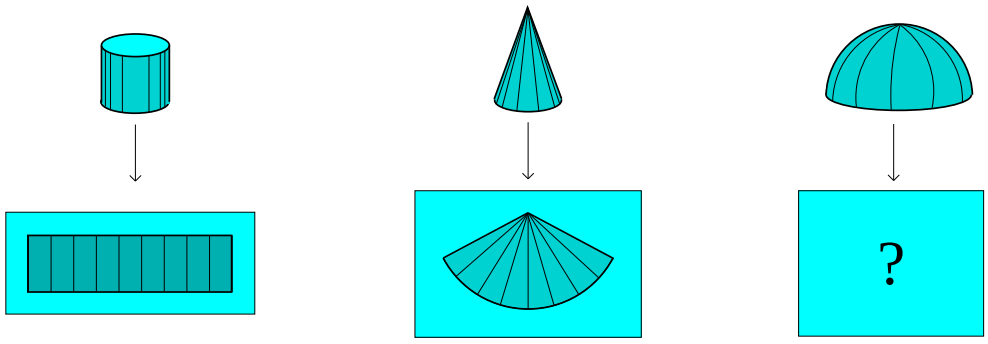
Le théorème d'Archimède

La dérivation des fonctions est un concept universel qui offre tout à la fois une compréhension fine des courbes et une mise en évidence de liens insoupçonnés entre notions *a priori* très différentes. Le théorème d'Archimède en donne un bel exemple. Archimède, qui vivait à Syracuse au troisième siècle avant J.-C., est l'un des plus grands savants de tous les temps. Il est connu du grand public pour la poussée qui porte son nom et le célèbre « Eurêka » qui aurait ponctué cette découverte. Esprit universel, à la fois astronome, ingénieur et géomètre, il est à l'origine de nombreuses découvertes dont les plus marquantes sont la vis sans fin, le principe du miroir ardent et un calcul révolutionnaire pour l'époque des décimales du nombre π. Mais son résultat le plus remarquable est la mise en lumière d'une correspondance cachée entre la sphère et le cylindre qui l'entoure. Cette correspondance établit en particulier l'égalité entre l'aire de la sphère et celle de son cylindre circonscrit : c'est le théorème d'Archimède.



C'est un théorème incroyablement novateur puisqu'il porte en germe les méthodes du calcul différentiel près de 2000 ans avant son invention. Archimède lui-même semblait extrêmement fier de cette découverte. Voici d'ailleurs ce qu'écrivait de lui au XVIII$^{\text{ème}}$ siècle Montucla, le premier historien des mathématiques : « Marcellus [...] témoigna un regret extrême de la mort de ce grand homme. Ne pouvant le sauver, sa générosité se tourna du côté de ceux qui lui appartenaient [...] il leur rendit leurs biens et le corps de ce grand homme pour lui dresser un tombeau. Archimède avait désiré qu'on y gravât une sphère inscrite dans un cylindre en mémoire de sa découverte sur le rapport de ces corps. Cela fut exécuté, et c'est à ce signe que Cicéron, étant questeur en Sicile, retrouva ce monument au milieu des ronces et des épines qui le dérobaient à la vue ».

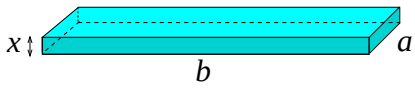
Au premier abord il peut paraître facile de *vérifier* le théorème d'Archimède, il suffit de calculer l'aire de la sphère et celle du cylindre et de constater qu'elles sont égales. Pour le cylindre, qui n'est autre qu'un rectangle refermé sur lui-même, ce calcul d'aire ne pose pas réellement de problème, en revanche pour la sphère il se révèle d'une grande difficulté tant conceptuelle que pratique. En effet, contrairement à certaines figures comme le cylindre ou le cône, la sphère ne peut se dérouler sur le plan, on ne peut donc calculer son aire comme si il s'agissait d'un objet plat. C'est l à un obstacle important : la sphère est irréductiblement un objet de l'espace et diffère en cela radicalement du cylindre ou du cône. Comment, face à cette difficulté accéder à son aire ?



Une observation très concrète va permettre de contourner cet obstacle : il est paradoxalement plus facile de mesurer un volume qu'une aire. En effet pour accéder au volume d'un objet, il suffit de l'immerger dans un récipient gradué et d'observer la variation du niveau

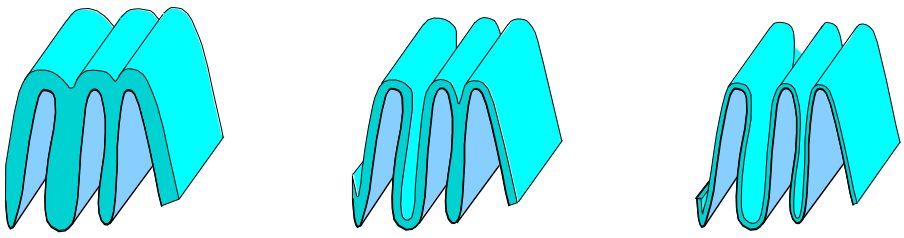
de l'eau et d'en déduire le volume recherché. En revanche, lorsque l'on réfléchit à un moyen de mesurer son aire on se trouve démuni. L'idée est donc d'obtenir l'aire d'un objet en passant par un calcul, plus accessible, de volume. Evidemment un volume n'est pas une aire mais il y a un moyen de déduire l'un à partir de l'autre et la clé de cette correspondance, on le verra, est justement donnée par la dérivation. Dans le cas élémentaire des objets plats cette correspondance est plus directement observable car le recours à la dérivation n'y est pas immédiatement apparent. Elle se matérialise dans la vie de tous les jours au travers d'une activité qui semble bien éloignée des considérations d'Archimède : la peinture d'une surface plane comme un mur par exemple. Chacun sait que la quantité de peinture nécessaire pour peindre uniformément un mur est proportionnelle à la surface du mur en question. Il y a donc une correspondance entre l'aire peinte et le volume de peinture utilisé : la détermination d'une aire est ainsi ramenée à celle d'un volume. Par exemple, sur le rectangle représenté ci-dessous, l'aire ab s'obtient en divisant le volume de peinture abx par l'épaisseur x de la couche. On écrit :

$$\text{Aire} = \frac{\text{volume}}{\text{épaisseur}}.$$



Cette formule met bien en liaison l'aire et le volume, malheureusement elle devient caduque dès que l'objet en question cesse d'être plan et en particulier elle ne permet pas d'accéder à l'aire des sphères. Au prix d'un passage à l'infiniment petit, il est cependant possible d'adapter cette méthode à des objets non plans et la rendre ainsi plus universelle. Il suffit pour cela de reprendre la démarche précédente, non plus sur une surface plate comme le rectangle, mais par exemple sur une surface ondulée qui résulterait d'une simple déformation de ce même rectangle.

Si l'on cherche à retrouver l'aire de ce nouvel objet à partir d'un volume de peinture, on constate cette fois que le résultat obtenu a une allure bien différente selon l'épaisseur de la couche. Plus cette couche est fine, mieux elle épouse la surface.



On pressent que le quotient du volume par l'épaisseur n'est pas toujours le même selon l'épaisseur de peinture choisie : plus la couche est fine, plus ce quotient s'approche de l'aire réelle de la surface ondulée qui n'est autre que celle du rectangle. On retrouve exactement cette aire en calculant la valeur de ce quotient *à la limite,* quand la couche de peinture

devient de plus en plus fine. D'une manière condensée on écrit :

$$\text{Aire } = \text{ limite } \left(\frac{\text{volume de la couche de peinture}}{\text{épaisseur de cette couche}}\right)$$

le mot « limite » signifiant que l'on prend la valeur vers laquelle tend ce quotient lorsque la couche de peinture se fait de plus en plus mince. Le rapport du volume par l'épaisseur, qui fournit l'aire du rectangle, donne pour des objets dans l'espace un résultat qui varie selon la couche de peinture, c'est pourquoi il est nécessaire de prendre la limite de ce rapport pour accéder à l'aire. On obtient ainsi une formule universelle qui permet de calculer l'aire d'objets de l'espace comme la sphère ou la surface ondulée. Maintenant si l'on se souvient de ce qui a été fait plus haut concernant la pente d'une courbe, une analogie apparaît :

Aire d'un objet plan $= \frac{\text{volume}}{\text{épaisseur}}$	Pente d'une droite $= \frac{\text{distance verticale}}{\text{distance horizontale}}$
Aire objet de l'espace $=$ limite $\left(\frac{\text{volume}}{\text{épaisseur}}\right)$	Pente d'une courbe $=$ limite $\left(\frac{\text{distance verticale}}{\text{distance horizontale}}\right)$

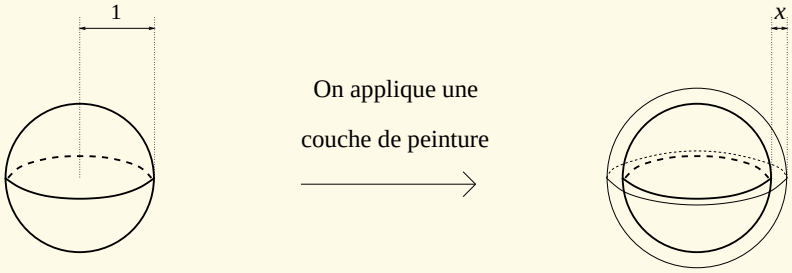
Bien que l'aire et la pente soient deux notions mathématiques à première vue très éloignées, on constate une grande similarité des formules qui les définissent. Or, la notion de dérivation découle directement des formules qui expriment la pente. Ce tableau laisse entrevoir que le calcul de l'aire d'un objet de l'espace relève de ce même principe de dérivation. Si tel est bien le cas, la première préoccupation est de savoir sur quelle fonction appliquer ce fameux principe. Comme le volume d'une couche de peinture recouvrant une surface donnée dépend évidemment de l'épaisseur x de cette couche, la fonction recherchée n'est autre que celle qui donne ce volume *en fonction* de l'épaisseur. Très précisément si on désigne
cette fonction par f, l'aire de la surface s'obtient alors en deux temps : on détermine tout d'abord la dérivée f', on remplace ensuite x par zéro dans cette dérivée. Le nombre que l'on trouve n'est autre que l'aire recherchée. La démonstration rigoureuse de ce résultat sortirait du cadre de cet ouvrage, on se contente donc de visualiser cette procédure au moyen d'un diagramme qui met bien en évidence le rôle central que joue la dérivée.

$$\begin{array}{ccccc} \text{volume de peinture} & & \text{sa dérivée} & & \text{en } x = 0 \\ f & \longrightarrow & f' & \longrightarrow & \text{Aire.} \end{array}$$

Ce diagramme reçoit en entrée le volume de peinture et offre en sortie, l'aire de la surface, il peut être vu comme une procédure mécanique qui transforme un volume en aire et dont le rouage essentiel est un calcul de dérivée. Si l'on applique plus particulièrement cette

Comment obtenir l'aire de la sphère à partir de son volume ?

Tout repose sur la détermination d'une fonction f qui donne le volume d'une couche de peinture selon son épaisseur. On commence donc par recouvrir une sphère de rayon 1 d'une couche de peinture d'épaisseur x.



Au premier abord, le volume de la couche de peinture peut sembler tout aussi inaccessible que l'aire que l'on recherche. L'astuce est de remarquer que ce volume est tout simplement la différence des volumes entre la sphère peinte de rayon $1+x$ (représentée à droite) et la sphère initiale de rayon 1. Sachant que le volume contenu dans une sphère de rayon R vaut $\frac{4}{3}\pi R^3$, le volume de peinture $f(x)$ s'écrit comme une différence :

$$f(x) = \frac{4}{3}\pi(1+x)^3 - \frac{4}{3}\pi 1^3,$$

qui se simplifie en :

$$f(x) = \frac{4}{3}\pi x^3 + 4\pi x^2 + 4\pi x.$$

En dérivant cette expression grâce aux règles de dérivation vues plus haut, on obtient :

$$\begin{array}{rrcccccc} & f(x) & = & \frac{4}{3}\pi \times x^3 & + & 4\pi \times x^2 & + & 4\pi \times x \\ \text{dérivation} \downarrow & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & f'(x) & = & \frac{4}{3}\pi \times 3x^2 & + & 4\pi \times 2x & + & 4\pi \times 1 \end{array}$$

ce qui s'écrit, après simplification, $f'(x) = 4\pi x^2 + 8\pi x + 4\pi$.

Après avoir déterminé l'expression du volume de la couche de peinture puis la dérivée de ce volume, il suffit d'appliquer la petite procédure décrite dans le texte principal pour obtenir l'aire de la sphère.

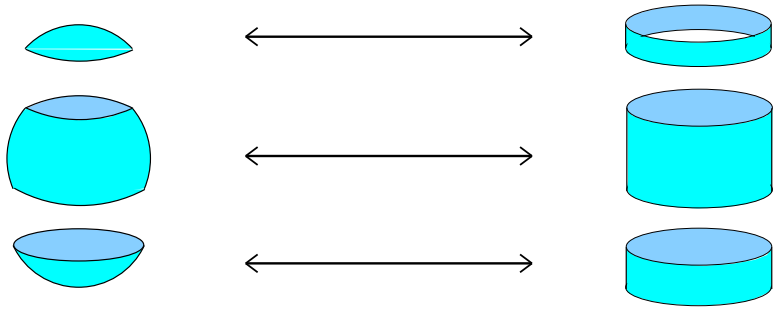
volume de peinture		sa dérivée		en $x = 0$
$\frac{4}{3}\pi x^3 + 4\pi x^2 + 4\pi x$	$\longrightarrow$	$4\pi x^2 + 8\pi x + 4\pi$	$\longrightarrow$	4π.

L'aire de la sphère de rayon 1 étant 4π, celle de la sphère de rayon R est donc $4\pi R^2$.

procédure à la sphère de rayon R, on obtient bien sûr son aire qui est $4\pi R^2$. Le détail de ce calcul se trouve dans l'encart coloré de la page précédente. Cette valeur, aujourd'hui bien connue, porte en elle-même le fameux résultat d'Archimède. En effet, l'aire de la sphère peut se décomposer en un produit de facteurs sous la forme :

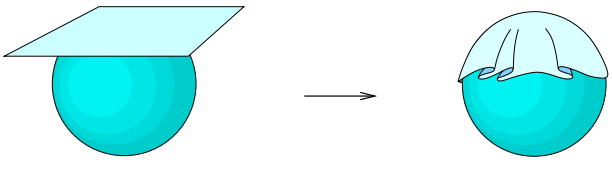
$$4\pi R^2 = 2\pi R \times 2R.$$

Cette écriture montre que la quantité $4\pi R^2$ représente également l'aire d'un cylindre de rayon R et de hauteur $2R$, c'est-à-dire aussi haut que large. En effet ce cylindre a pour base un cercle de rayon R, donc de périmètre $2\pi R$, lequel périmètre multiplié par la hauteur $2R$ donne bien pour le cylindre une aire égale à $4\pi R^2$. Ainsi $4\pi R^2$ représente tout aussi bien l'aire de la sphère de rayon de R que celle de son cylindre circonscrit. La décomposition ci-dessus met donc en évidence une coïncidence de formules mais il se pourrait que cette coïncidence soit due au hasard et ne soit pas le signe d'une véritable correspondance géométrique entre les deux objets. En fait il n'en est rien, la coïncidence des formules n'est pas du tout fortuite, elle cache un résultat bien plus fort : de quelque manière que l'on coupe, en horizontale, la sphère avec le cylindre qui l'entoure, l'égalité des aires demeure. On a coutume, en hommage à ce grand homme, d'appeler ceci le théorème d'Archimède.



Les aires de la sphère et du cylindre qui l'entoure sont égales tranche à tranche.

Cet énoncé, qui paraît déjà surprenant lorsque l'on se place au niveau de l'équateur, devient tout à fait inattendu au voisinage des pôles puisque l'on compare la surface d'une calotte avec celle d'un anneau. Insistons bien sur le fait qu'une portion de cylindre, qui s'apparente à une portion de plan, ne peut en aucun cas se développer sur la sphère. En effet si l'on essaie de revêtir ainsi la sphère, des plis et des recouvrements apparaissent inévitablement.



Cette correspondance entre les aires est donc un petit miracle... qu'il est aisé de vérifier avec l'aide du calcul différentiel au moyen de la procédure qui donne l'aire d'une surface

à partir d'un volume. Bien entendu les calculs pratiques sont un peu plus techniques que ceux nécessaires pour la sphère tout entière, mais ils sont accessibles à quiconque veut s'en donner la peine. Toutefois, même s'ils permettent de se convaincre de la validité du théorème d'Archimède, ces calculs n'en donnent pas une compréhension globale. Bien au contraire, le cheminement suivi pour parvenir au résultat semble tortueux, il faut invoquer un passage à la limite, découvrir une analogie avec la dérivation puis effectuer des calculs de volume. On obtient, certes, le théorème mais bien peu de lumière sur la raison profonde de cette mystérieuse correspondance. La découverte d'Archimède n'en apparaît que plus impressionnante, d'autant plus que l'illustre savant ne pouvait bénéficier des notations et des concepts modernes qui clarifient considérablement les différentes notions mises en jeu. Au III$^{\text{ème}}$ siècle avant J.-C. le concept de dérivation n'existe pas, les chiffres arabes non plus, pas plus que les symboles algébriques (comme $+$, $-$, et $=$). Il faudra attendre plus de mille ans pour que les notations algébriques fassent timidement leur apparition, et deux mille ans pour que le calcul infinitésimal voie le jour. Ce théorème d'Archimède est donc réellement un exploit.

Le calcul intégral

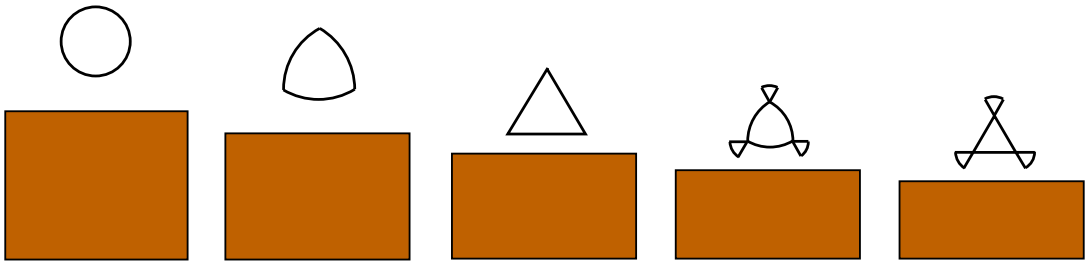
En 1593 l'ambassadeur de Hollande Adrien Romain fut reçu par le roi Henri IV en son palais de Fontainebleau. Il affirma publiquement que la France ne comptait aucun grand mathématicien, le roi fit alors appeler un de ses conseillers qu'il savait féru de mathématiques : François Viète. L'ambassadeur, qui persistait dans son opinion, lança à ce dernier un défi. Saurait-il résoudre une équation du quarante cinquième degré si complexe qu'une seule page ne suffisait pas, selon la formulation de l'époque, à la contenir ? Il ne fallut pas plus d'une seule nuit à Viète qui est aujourd'hui considéré comme le fondateur de l'algèbre moderne, pour résoudre cette équation. Beau joueur, Romain reconnut la grande valeur du mathématicien français et devint son ami. Au delà de son aspect historique cette anecdote est révélatrice d'une pratique alors très courante, celle de se lancer des défis mathématiques. Il s'agissait de se mesurer au reste de la communauté en leur adressant des questions que l'on avait soi-même résolues et en les dotant généralement d'une forte somme d'argent. Certains de ces défis sont restés célèbres, Fermat avait remarqué que le nombre 26 était compris entre 25, qui est le carré de 5, et 27 qui est le cube de 3. Il s'était alors demandé si il existait d'autres nombres qui soient de la même façon entourés d'un carré et d'un cube. N'en trouvant pas, il entreprit et parvint à démontrer que 26 était le seul nombre de ce type. Il lança cette question comme un défi aux mathématiciens anglais avec qui il entretenait une relation d'amicale compétition, lesquels

finirent par s'avouer vaincus. Il se trouve en effet que la démonstration de ce résultat est d'une telle difficulté que seul le génie de Fermat pour les questions d'arithmétique était, en ce temps là, capable d'en venir à bout.

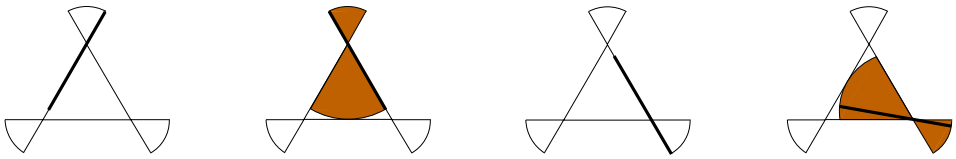
A peu près à la même époque, un autre personnage célèbre, Blaise Pascal, lance à son tour un défi qui met en jeu, d'après le mot de son auteur, la courbe la plus simple après la droite et le cercle. Malgré la très forte somme d'argent promise au vainqueur, personne ne réussit à répondre au problème. Quelle était donc cette courbe ? C'est celle que dessine un point situé au bord d'un disque qui roule sur l'horizontale : la célèbre *cycloïde* déjà rencontrée au premier chapitre.

Dans la vie de tous les jours, on peut observer une telle courbe en suivant du regard une lumière fixée sur la roue d'un vélo. Cette courbe a suscité l'intérêt des mathématiciens car elle est issue d'une combinaison très naturelle du cercle et de la droite. En dépit de sa simplicité, elle avait été ignorée par les grecs et ne fut remarquée qu'au début du XVII$^{\text{ème}}$ siècle. Cette courbe étant toute nouvelle, ses propriétés restaient à défricher, à commencer par la question de l'aire. Celle d'un disque est bien connue, elle vaut πR^2, mais quelle est la formule qui donne l'aire située sous une arche de cycloïde ? Cette question s'avéra très difficile et c'est Roberval, un des grands mathématiciens de l'époque, célèbre en outre pour la balance qui porte son nom, qui découvrit cette fameuse formule. Elle s'écrit $3\pi R^2$, l'aire d'une arche est donc le triple de celle du disque qui l'engendre. Roberval s'empressa alors de proposer cette question comme défi à tous les géométres sans qu'aucun d'entre eux ne parviennent à le relever. Quant au défi de Pascal, il s'agissait d'un raffinement de celui de Roberval, toujours sur ce même thème de la cycloïde.

Comme on le constate avec les défis de Roberval et de Pascal, le calcul des aires était une question centrale qui préoccupait les plus grands esprits de l'époque. Cette question va connaître une avancée spectaculaire avec l'apparition des principes du calcul intégral, un calcul dont l'émergence n'a été possible qu'avec la découverte préalable du calcul différentiel par Newton et Leibniz. Avec ces nouveaux principes, on a pu clarifier puis simplifier considérablement toutes ces questions de calcul d'aire au point qu'aujourd'hui les défis de Roberval et de Pascal sont à la portée d'un lycéen de classe de Terminale, les calculs ne requérant que quelques lignes. Dans le cadre de la question de Kakeya qui porte justement sur l'aire des figures, ces mêmes principes s'appliqueront tout naturellement et rendront accessibles un grand nombre de figures nouvelles. Jusqu'à présent les figures rencontrées sont en effet en nombre très restreint, une petite rétrospective en livre les principales : en premier lieu le disque dont l'aiguille est le diamètre, puis le Reuleaux et le triangle et enfin les différentes familles d'hélices.



Il est important de remarquer ici que ces surfaces ne font intervenir que des droites et des cercles, ceci rend aisé le calcul de leur aire mais limite les possibilités d'inventer des figures nouvelles. En s'autorisant des courbes plus compliquées, on se donne beaucoup plus de liberté pour concevoir toutes sortes de figures. Il est alors raisonnable de penser que dans ces conditions on puisse obtenir des figures d'aire encore plus petite. Mais ces figures étant délimitées par des courbes plus complexes, un problème de taille va surgir immanquablement : comment déterminer leur aire ? C'est précisément ici que le calcul intégral va intervenir car ce calcul qui résout très simplement le problème de la cycloïde, s'applique de la même façon à toutes sortes de courbes complexes. De telles courbes apparaissent immanquablement dès que l'on réfléchit plus avant au problème de Kakeya. Par exemple en remplaçant les arcs de cercle de l'hélice triangulaire par des courbes plus complexes, il est possible d'obtenir une figure plus petite qui réponde au problème de Kakeya. Cette amélioration repose sur l'optimisation du trajet de l'aiguille à l'intérieur de la figure. Jusqu'à présent le trajet considéré à l'intérieur de la figure se composait d'une suite de rotations et de glissements de l'aiguille, il est décrit dans les illustrations ci-dessous.

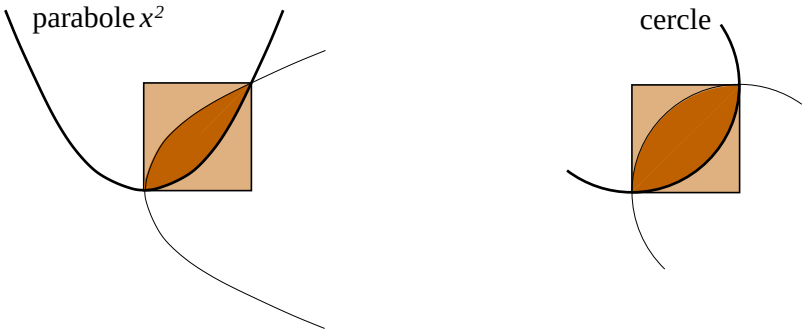


Une observation attentive de ce mouvement permet d'envisager un gain de place. Au lieu de faire tourner successivement l'aiguille autour des sommets du triangle, on fait glisser à chaque fois une de ses extrémités le long d'un côté. Au total, il résulte bien de ce mouvement une rotation de l'aiguille mais il apparaît cette fois de petites zones délaissées de part et d'autre de chacun des trois petits secteurs.

On fabrique ainsi une nouvelle figure, à l'intérieur même de cette hélice, donc plus petite, dans laquelle on peut effectuer une rotation de l'aiguille. Cette nouvelle figure n'étant plus exclusivement délimitée par des droites et des cercles mais également par des portions de courbes plus complexes, la détermination de son aire relève du calcul intégral. Il se trouve que dans cet exemple ce calcul recèle quelques difficultés, c'est pourquoi, pour commencer, nous allons nous pencher sur un exemple plus simple.

Le partage d'Archimède

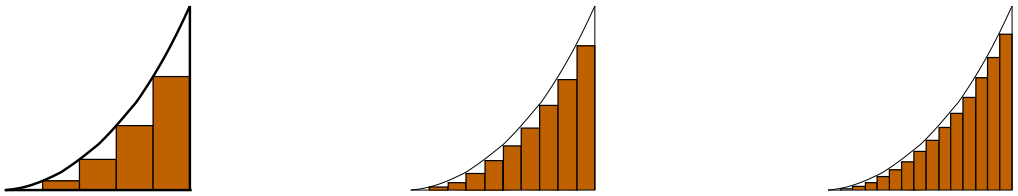
Il existe une façon harmonieuse et inattendue de partager un carré en trois parts égales. Cet élégant partage, dont l'origine remonte à Archimède, fait intervenir une courbe bien connue depuis l'Antiquité : la parabole. Cette courbe à l'instar de la cycloïde est l'une des plus élémentaire qui puisse se concevoir, elle représente la fonction x^2 et sa forme est celle d'une cuvette. En disposant judicieusement deux paraboles comme dans le dessin ci-dessous on réalise un partage équitable du carré en trois parts.



Le second dessin montre que ce partage réalisé avec des arcs de cercles conduit à trois parties d'aires inégales. Archimède savait que le partage du carré avec deux paraboles produisait des aires *rigoureusement* identiques, et sa conviction était fondée sur un calcul précis d'aire sous une parabole. En effet le problème se résume à s'assurer que l'aire de chacune des trois pièces de ce puzzle vaut $\frac{1}{3}$, l'aire totale du carré étant 1. Il suffit donc de montrer que l'aire d'une seule des trois pièces vaut $\frac{1}{3}$, puisque, les deux pièces en gris clair étant identiques, si l'une d'elle occupe le tiers du carré et il en sera de même pour la

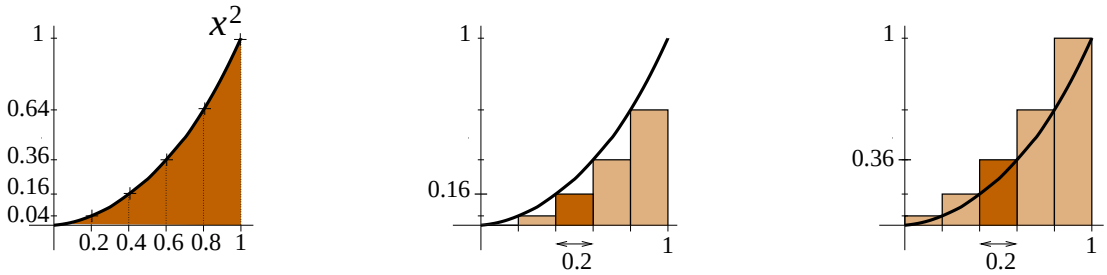
seconde, le tiers restant étant dévolu à la pièce centrale. Toute la difficulté consiste donc à déterminer l'aire de la partie en gris clair sous la parabole x^2, c'est-à-dire sous une courbe qui n'est ni un cercle ni une droite et pour laquelle les formules élémentaires du calcul des surfaces ne s'appliquent pas. C'est précisément pour répondre à ce type de difficulté que les mathématiciens ont mis au point le calcul intégral.

L'idée maîtresse de ce calcul est d'approcher la surface que l'on ne connaît pas par des figures plus simples dont on peut aisément calculer l'aire. Il en résulte une valeur qui n'est bien entendu qu'une approximation de l'aire recherchée, mais en recommençant ce procédé avec des approximations de plus en plus fines, on obtient *à la limite*, l'aire désirée. Concrètement pour mettre en œuvre cette méthode, on remplit le domaine de rectangles car ce sont des formes dont il est facile de calculer l'aire. La disposition de ces rectangles se fait comme pour une palissade, la base de ceux-ci se situant sur l'horizontale.



Ces palissades successives sont intérieures au domaine, on les appelle les petites palissades, elles comportent sur le dessin cinq, dix et quinze lames. On peut de la même manière imaginer des palissades qui recouvrent complètement le domaine, ce sont les grandes palissades.

Observons que les petites et grandes palissades approchent d'autant mieux le domaine que les lames sont fines. Il reste maintenant à déterminer la surface recouverte par ces grandes et petites palissades, ce que l'on va faire concrètement sur l'exemple d'une palissade à cinq lames.



L'aire d'une palissade est la somme des aires de chacun des rectangles qui la composent, il suffit donc de savoir calculer l'aire d'un rectangle quelconque, ce qui est très facile. A titre d'exemple l'aire du rectangle gris foncé est 0.2×0.16 pour la petite palissade et 0.2×0.36 pour la grande, en répétant ce calcul aux autres rectangles on obtient au final :

$$\begin{array}{rcl} \text{Aire de la petite palissade à cinq lames} & = & 0.24 \\ \text{Aire de la grande palissade à cinq lames} & = & 0.44. \end{array}$$

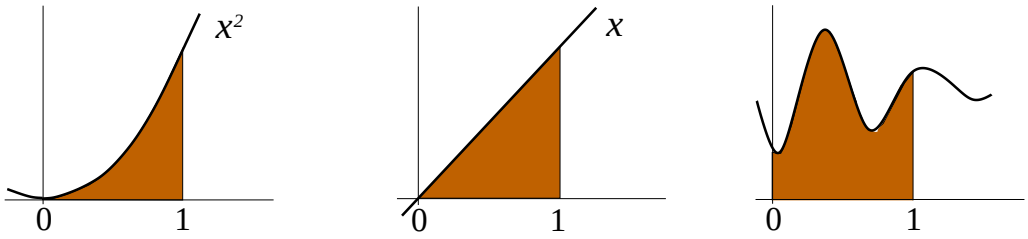
Ainsi, l'aire du domaine se situe entre les valeurs 0.24 et 0.44. Dans le tableau qui suit ce même calcul des aires des petite et grande palissades est répété avec un nombre de lames de plus en plus grand, les valeurs deviennent alors de plus en plus proches l'une de l'autre.

	Petite palissade	**Aire du domaine**	Grande palissade
dix lames	0.285	**0.**_____	0.385
cent lames	0.32835	**0.3**____	0.33835
mille lames	0.33283...	**0.33**___	0.33383...
dix mille lames	0.33328...	**0.333**__	0.33338...
⋮	⋮	⋮	⋮

L'aire de la partie grisée sous la parabole de la première illustration n'a d'autre alternative que de valoir 0.33333... c'est-à-dire $\frac{1}{3}$, de cette suite d'approximations de plus en plus fines résulte bien une valeur *exacte*. Puisque cette valeur est justement un tiers, la découpe du carré selon des paraboles divise bien ce dernier en trois parties d'aires égales.

Qu'est-ce qu'une intégrale ?

Cette méthode des palissades n'est pas spécifique à l'exemple précédent, elle est en fait très générale et permet de calculer l'aire d'une zone délimitée par une courbe. Regardons en guise d'exemple les trois courbes ci-dessous.



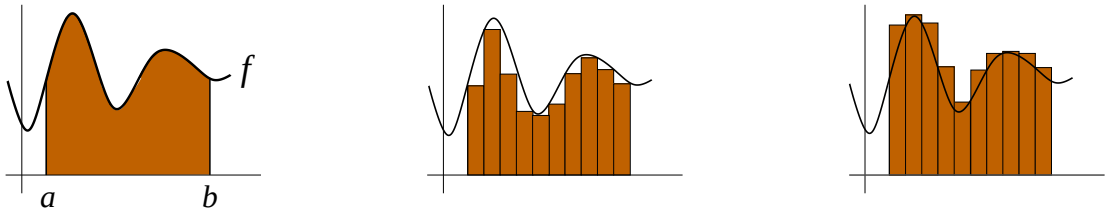
On reconnaît à gauche la fameuse parabole x^2, vient ensuite une simple droite puis une courbe plus générale. On leur applique la méthode des palissades et on réunit les résultats dans le tableau :

	Aire à la limite de la petite palissade	**Aire du domaine grisé**	Aire à la limite de la grande palissade
parabole	0.33333...	**1/3**	0.33333...
droite	0.49999...	**0.5**	0.50000...
courbe	0.74999...	**0.75**	0.75000...

La première ligne est un condensé du paragraphe précédent, les trois valeurs qui y figurent sont un seul et même nombre qui est l'aire du domaine situé sous la parabole. Les deux lignes suivantes sont, contrairement aux apparences, exactement de même nature ; en effet on est confronté ici à une facétie de la représentation des nombres : il est des cas où un même nombre peut admettre deux écritures décimales différentes, par exemple, 0.99999... et 1, ou encore 0.49999... et 0.5. La méthode des palissades donne donc sans aucune ambiguïté l'aire située sous la droite et l'aire située sous la courbe représentée en troisième position. Cela étant, on peut se demander s'il en est ainsi pour toutes les courbes, autrement dit, s'il est des cas pour lesquels les aires qui résultent des petite et grande palissades sont différentes. De façon tout à fait surprenante, de tels cas existent bel et bien mais ils font intervenir des fonctions un peu excentriques qui échappent à cette théorie. Dans ces cas la notion même d'*aire* sous la courbe n'a plus de signification évidente. Pour toutes les fonctions usuelles, celles qui nous intéressent, les petites et grandes palissades conduisent au même nombre qui est l'aire située sous la courbe qui représente la fonction f. Pour écrire ce nombre, les mathématiciens utilisent le symbole :

$$\int_0^1 f$$

cette notation due à Leibniz se lit « intégrale de 0 à 1 de la fonction f ». Par exemple, pour le dessin le plus à gauche de l'illustration qui précède, la fonction f est la fonction x^2 et ce nombre vaut 0.33333... pour le dessin du milieu où la fonction f est x, ce nombre vaut 0.5, etc. Le symbole qui intervient dans cette écriture est un S allongé tel qu'on l'écrivait avant la Révolution. C'est le S du mot *Somme*, il rappelle que l'on effectue une somme d'aires de rectangles. Bien entendu, la méthode des palissades ne s'applique pas exclusivement à un domaine qui serait limité par les valeurs 0 et 1, on peut choisir d'autres valeurs que l'on appelle a et b. La même procédure donne alors l'aire d'autres domaines comme le suggère l'illustration ci-dessous.



Cette aire est notée en toute logique :

$$\int_a^b f.$$

La méthode des palissades est intéressante à plus d'un titre, elle permet non seulement d'obtenir l'aire de toutes sortes de domaines mais elle s'adapte aussi à de nombreuses autres situations. En revanche elle est fastidieuse, le calcul de l'aire d'une seule palissade pouvant déjà s'avérer très long. Heureusement, Comme dans le cas de la dérivation, il existe une

formule qui permet de s'épargner tous ces calculs, une formule d'une importance capitale qui met en évidence un lien spectaculaire entre le calcul de l'aire et la dérivation. Elle dit en substance, que pour obtenir l'aire d'une tranche située sous la courbe d'une fonction f, il suffit de connaître une autre fonction F qui lorsqu'on la dérive, redonne f. C'est la fameuse *formule d'intégration* :

$$\int_a^b f = F(b) - F(a)$$

où $F(a)$ et $F(b)$ sont les deux valeurs que donne la fonction F lorsque l'inconnue x est remplacée par le nombre a et par le nombre b. Ainsi, l'aire sous une courbe s'obtient directement en effectuant une simple soustraction faisant intervenir une fonction F, reliée à f par une dérivation. Il n'est plus nécessaire de se livrer au calcul des aires des grande et petite palissades, puis de pousser ce calcul à la limite pour enfin obtenir la valeur de l'aire. C'est là un des grands miracles de cette formule d'intégration : une procédure laborieuse est remplacée par cette unique soustraction. Voici, à titre d'exemple, comment traiter un problème tel que celui du partage d'Archimède au moyen de cette formule. Comme on l'a vu, ce problème se réduit à montrer que le nombre

$$\int_0^1 f$$

vaut $\frac{1}{3}$. Pour appliquer la formule, il est nécessaire de trouver une fonction F dont la dérivée est f c'est-à-dire x^2. Un simple coup d'œil sur les dérivations fournies au chapitre précédent permet de constater que la dérivée de x^3 est $3x^2$. Par conséquent la fonction $F = \frac{1}{3}x^3$ convient comme on peut s'en rendre compte en lui appliquant le procédé de dérivation :

$$\begin{array}{rccl} & F & = & \frac{1}{3} \times x^3 \\ \text{dérivation} & \downarrow & & \downarrow \\ & f & = & \frac{1}{3} \times 3x^2 \quad = x^2. \end{array}$$

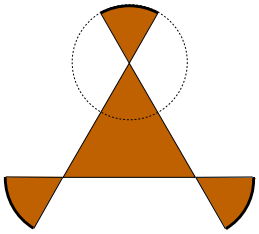
Ainsi, puisque sa dérivée est x^2, cette fonction F peut être utilisée dans la formule d'intégration. Le calcul de l'aire se résume alors à une soustraction :

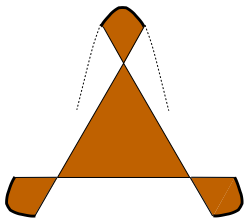
$$\begin{array}{ccccccc} \int_a^b f & = & F(b) & - & F(a) & & \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \int_0^1 f & = & F(1) & - & F(0) & = & \frac{1}{3}1^3 - \frac{1}{3}0^3 = \frac{1}{3}. \end{array}$$

Comme on le constate, cette méthode est bien plus directe que les calculs menés en début de chapitre. En contrepartie, une difficulté apparaît, celle de trouver la fonction F, dite *primitive* de f, qui figure dans la formule d'intégration. Pour simplifier la vie du mathématicien, il existe des tables qui donnent les primitives des fonctions les plus courantes ce qui lui permet d'appliquer la formule d'intégration mécaniquement et d'effectuer ainsi très rapidement de nombreux calculs d'aire.

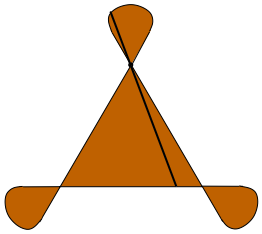
Avancée sur la question de Kakeya

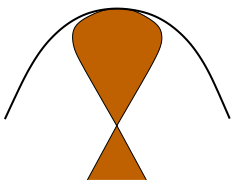
Il est possible grâce au déplacement astucieux de l'aiguille décrit au début de ce chapitre de libérer un peu de place à l'intérieur de chaque secteur d'une hélice triangulaire. Tout le problème est maintenant de calculer la nouvelle aire, c'est-à-dire la surface réellement nécessaire au retournement de l'aiguille dans chacun de ces secteurs. Cette nouvelle surface est délimitée par une courbe et c'est l'aire située sous cette courbe que l'on aimerait connaître. Malheureusement cette courbe conduit à un calcul d'aire relativement technique et il est préférable, quitte à perdre un peu de place, de la remplacer par une courbe plus familière : la parabole. Au final la figure que l'on obtient est un *triangle à paraboles*, c'est-à-dire une hélice dans laquelle les arcs de cercles ont été remplacés par des arcs de paraboles.



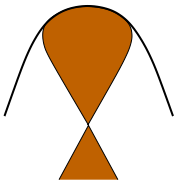


Une première difficulté pour construire cette figure est de choisir parmi toutes les paraboles la plus adéquate, c'est-à-dire celle qui colle au mieux à l'hélice. Elle ne doit être ni trop large, ce qui ferait perdre de la place, ni trop étroite, ce qui empêcherait l'aiguille de tourner.

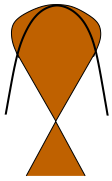




Trop large



Adéquate

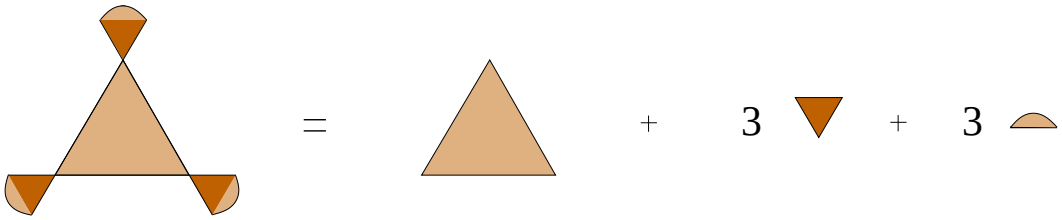


Trop étroite.

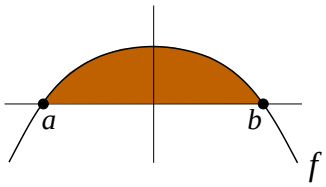
Dans cet exemple, où l'on a pris pour simplifier une longueur de boucle égale au tiers de celle de l'aiguille, une étude particulière montre que la parabole adéquate a pour formule :

$$f = \frac{1}{12} - 4x^2.$$

C'est donc sur cette fonction que vont s'appliquer les principes du calcul intégral. L'aire du triangle à paraboles s'obtient à partir de sa décomposition en figures géométriques : quatre triangles équilatéraux (un grand et trois petits) et de trois petites calottes paraboliques.



L'aire du grand et des petits triangles résulte d'un calcul élémentaire ; celle de la calotte, du calcul intégral. En effet cette dernière apparaît comme étant l'aire délimitée par la courbe de la fonction $f = \frac{1}{12} - 4x^2$ représentée ci-dessous.



Cette aire est précisément le nombre

$$\int_a^b f$$

qui se calcule au moyen de la formule d'intégration. Pour ce faire, il est nécessaire de connaître non seulement une primitive F de f mais aussi les nombres a et b qui délimitent le domaine. Or, il se trouve que la fonction $F = \frac{1}{12}x - \frac{4}{3}x^3$ se dérive en f, quant aux nombres a et b, un calcul algébrique très simple en fournit la valeur : a vaut -0.14433... et b vaut 0.14433... La formule d'intégration donne alors l'aire de la petite calotte :

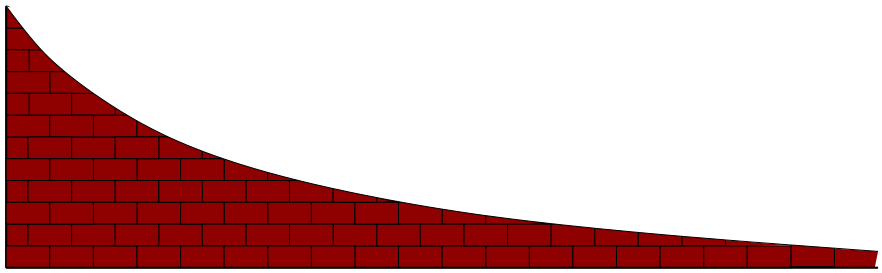
$$\begin{aligned} \int_a^b f &= F(b) - F(a) \\ &= F(0.14...) - F(-0.14...) = 0.01603... \end{aligned}$$

et par suite, l'aire de toute la figure qui vaut 0.41296... On le constate, et ce n'est pas une surprise, l'hélice triangulaire ainsi tronquée voit son aire diminuer légèrement. Bien sûr le gain est modeste mais il est désormais possible, grâce au calcul intégral, d'envisager des figures aux contours complexes : notre champ d'investigation s'élargit soudainement.

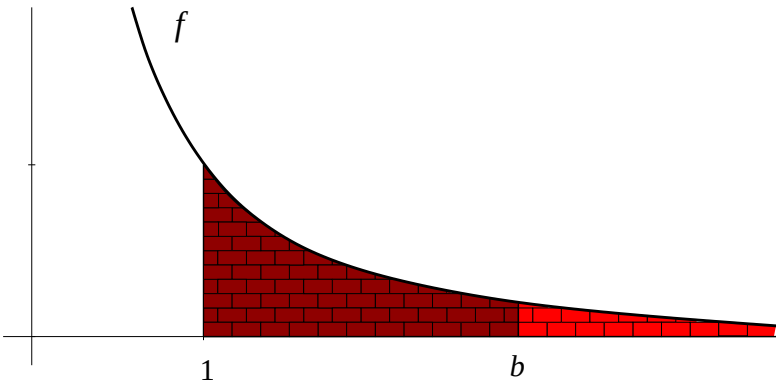
Le paradoxe du peintre

Peut-on peindre un mur infini avec un nombre fini de pots de peinture ? Aussi surprenant que cela puisse paraître, la réponse est *oui*, c'est le célèbre paradoxe du peintre : il est possible de construire un mur dont la longueur est infinie et dont l'aire est finie. Ainsi, un peintre qui recouvrirait ce mur d'une couche de peinture uniforme n'aurait besoin que d'un nombre fini de pots de peinture. Comment cela est-il possible ? La clé du paradoxe tient dans le fait que la hauteur de mur n'est pas constante mais va en s'amenuisant, par conséquent plus le peintre se déplace vers la droite, moins il a besoin de peinture pour

couvrir une même longueur de mur. Cela dit, il faut garder à l'esprit que le mur est infini, et même si l'on a besoin dune quantité de peinture de moins en moins grande, il reste tout à fait surprenant qu'au total une quantité finie de peinture soit suffisante.



Le secret de ce mur paradoxal réside précisément dans la manière dont il s'amenuise car il y a de nombreuses façons de construire un mur de plus en plus petit mais seules quelques unes d'entre elles conduisent à une aire globale finie. En mathématicien, on peut voir le mur comme un domaine délimité par la courbe d'une fonction, il s'agit alors de choisir une « bonne » fonction afin que la surface du mur soit finie. Bien entendu il y a une multitude de fonctions qui revêtent une telle apparence et la réalisation ou non de ce mur paradoxal va dépendre de la fonction que l'on choisit. L'un des choix les plus simples est de prendre pour cette fonction l'inverse du carré, c'est-à-dire celle dont l'expression s'écrit $f = \frac{1}{x^2}$. Le dessin ci-dessous en donne sa courbe représentative et le mur correspondant.



Il s'agit bien d'une courbe qui décroît rapidement, la raison en est la suivante : plus le nombre x est grand, c'est-à-dire plus on est à droite sur l'horizontale, plus son inverse $\frac{1}{x}$ est petit. Et cet effet est encore accentué quand le nombre x en question est élevé au carré comme c'est le cas ici. On décide arbitrairement que le mur débute lorsque $x = 1$ et qu'il se prolonge indéfiniment le long de l'axe horizontal. Tout le problème est maintenant de calculer son aire. La longueur du mur étant infinie, il est nécessaire d'effectuer ce calcul avec précaution. Si l'on imagine pour commencer qu'au lieu d'être infini, ce mur s'arrête à une certaine valeur de x, appelons cette valeur b, l'aire de la tranche de mur comprise

entre 1 et b peut alors être déterminée au moyen du calcul intégral. Précisément il s'agit du nombre

$$\int_1^b f.$$

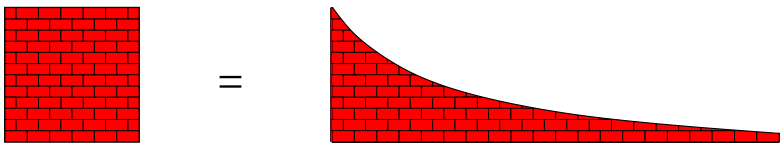
D'après la formule d'intégration, le calcul de ce nombre se résume à la simple détermination d'une primitive, c'est-à-dire d'une fonction F dont la dérivée est la fonction f. Ici cette détermination n'est pas une chose difficile en soi, il existe en effet des tables qui donnent à l'utilisateur les primitives de nombreuses fonctions et où il est possible de lire que la fonction $F = -\frac{1}{x}$ se dérive en $f = \frac{1}{x^2}$. Il ne reste ainsi plus qu'à soustraire $F(1)$ à $F(b)$ pour obtenir l'aire de la tranche de mur :

$$\int_1^b f = 1 - \frac{1}{b}.$$

L'idée est maintenant d'examiner l'aire de portions du mur de plus en plus longues qui correspondent à des valeurs de b de plus en plus grandes. Le point remarquable est que ces aires se rapprochent indéfiniment d'une certaine valeur comme cela se manifeste sur le tableau suivant :

b	2	10	100	1000	10000	...	à la limite
Aire de la tranche de mur	0.5	0.9	0.99	0.999	0.9999	...	1

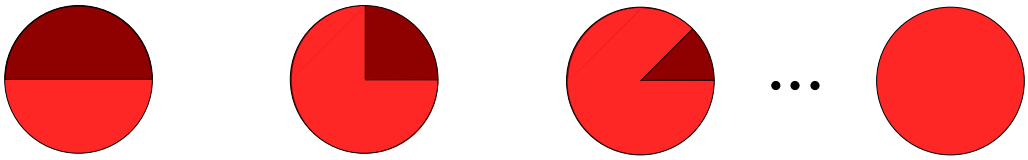
On observe que lorsque b grandit, l'aire de la tranche de mur s'approche d'aussi près que l'on veut de la valeur 1. A la limite, quand tout le mur est recouvert, cette valeur est précisément 1, ce qui permet d'affirmer que l'aire de ce mur infini vaut 1. C'est exactement celle d'un mur carré de hauteur et de longueur égales à 1.



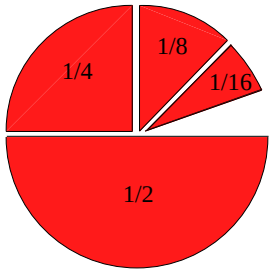
Pour peindre le mur infini il ne faut donc pas plus de peinture que pour peindre ce carré, c'est là une des nombreuses surprises de l'infini. Ce paradoxe apprend à nous méfier de nos premiers réflexes : ce n'est pas parce qu'un objet est infini que toutes les quantités qui lui sont associées seront forcément infinies. Les lignes qui suivent en proposent un autre exemple.

Il s'agit encore d'un problème bien concret : comment partager un unique gâteau entre une infinité de convives ? Puisqu'il y a une infinité de convives, la solution qui consiste à découper le gâteau en parts égales ne peut convenir. La clé du problème, un peu à la manière de ce qui se passait pour le mur infini, réside dans un partage du gâteau en des

parts de plus en plus petites. Voici une solution possible, on découpe le gâteau en deux parts égales et on donne l'une des deux parts au premier convive. Il reste une part que l'on découpe encore en deux parts égales. On distribue un des morceaux au deuxième convive et ainsi de suite avec la part qui reste. Aussi loin que l'on se place dans la liste des convives il reste toujours du gâteau, le convive suivant a donc droit à une part, la moitié de ce qui reste. De cette manière, non seulement la totalité du gâteau est distribuée mais tous les convives, bien qu'en nombre infini, auront été servis.



Si l'on considère cela avec l'œil du mathématicien et si l'on désigne par le nombre 1 la totalité du gâteau, la part du premier convive correspond donc au nombre $\frac{1}{2}$, celle du deuxième correspond au nombre $\frac{1}{4}$, etc.



Puisque la réunion de toutes les parts est égale au gâteau tout entier, cela signifie que la somme :

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+...$$

est égale à 1. Une telle somme constituée d'une infinité de nombre s'appelle une *série numérique* ou encore une *somme infinie*. Dans le cas du partage du gâteau le résultat obtenu est loin d'être anodin puisqu'il s'agit de la valeur 1, c'est-à-dire d'une valeur finie. On peut ainsi ajouter une infinité de nombres et obtenir un résultat fini. Même si ce phénomène peut paraître surprenant, il se rencontre tous les jours dans l'écriture décimale des nombres, par exemple l'écriture :

$$0.33333... = \frac{1}{3}$$

signifie que la somme infinie :

$$0.3 + 0.03 + 0.003 + 0.0003 + 0.00003 + ...$$

est égale au nombre $\frac{1}{3}$. Ceci souligne une fois de plus que même en présence de l'infini on peut aboutir à une quantité finie. Ce n'est évidemment pas toujours le cas. Si on ajoute

une quantité constante, disons 1 pour fixer les idées, la somme :

$$1+1+1+1+1+1+.....$$

n'a pas une valeur finie. En réalité, si le nombre que l'on ajoute à chaque étape ne se rapproche pas de zéro, la somme n'a aucune chance d'être finie. Plus subtilement, le fait d'ajouter des nombres qui se rapprochent indéfiniment de zéro ne garantit pas pour autant que la somme soit finie. Un exemple célèbre est donné par la somme des inverses des entiers :

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+...$$

dont on montre par un raisonnement assez simple, présenté page suivante dans l'encart en couleur, qu'elle n'est pas finie. Ceci met en évidence la subtilité des sommes infinies, même si les termes tendent vers zéro, le résultat peut être infini. Il est donc difficile, en présence d'une telle somme, d'affirmer *de visu* si sa valeur est finie. Il s'avère que dans de nombreuses situations le calcul intégral permet de trancher et c'est en particulier le cas avec la somme infinie la plus célèbre des mathématiques, à savoir, celle des inverses des carrés :

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\frac{1}{36}+...$$

La célébrité de cette somme tient non seulement à la simplicité des termes qui la composent mais aussi à son résultat qui voit l'apparition tout à fait inattendue du nombre π : une mystérieuse coïncidence se fait jour entre les carrés des nombres entiers et le fameux nombre π, celui là même qui relie la circonférence d'un cercle à son diamètre. C'est Euler qui, par un raisonnement d'une grande ingéniosité, a révélé cette coïncidence en établissant l'égalité merveilleuse :

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\frac{1}{36}+...=\frac{\pi^2}{6}.$$

Cette égalité peut s'interpréter comme un chemin qui mène des nombres entiers au nombre π. Par son élégance et sa simplicité elle n'a cessé d'exercer sur les mathématiciens une puissante fascination et elle est encore aujourd'hui source de questionnements : que se passe-t-il par exemple si on remplace les carrés par des cubes ou par des puissances cinquièmes ? Nul ne le sait. Il s'avère même que le comportement de cette somme lorsque l'on remplace les carrés par des puissances « quelconques » est l'une des question les plus profondes des mathématiques à l'heure actuelle.

La découverte de cette formule merveilleuse ne fut pas, loin s'en faut, le seul coup d'éclat du mathématicien suisse Leonhard Euler (portrait en tête de chapitre). Ce savant exceptionnel a en effet contribué de manière fondamentale à tous les domaines des mathématiques de son temps. Son œuvre est colossale. Sa publication a nécessité 75 livres de 600 pages auxquelles il faut ajouter les 4000 lettres de sa correspondance scientifique. Le volume mais surtout la profondeur de ses travaux, en font l'un des plus grand mathématicien de tous les

La somme de tous les inverses n'a pas une valeur finie

Contrairement à ce que l'intuition pourrait laisser penser, la somme infinie des inverses est de même nature que la somme :

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+.....$$

autrement dit, il ne peut en résulter une quantité finie. Le lien entre ces deux sommes devient apparent si l'on regroupe les termes de la somme des inverses en blocs comme indiqué ci-dessous :

$$1+\frac{1}{2}+\overbrace{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}^{2\text{ termes}}+\overbrace{\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}}^{4\text{ termes}}+\overbrace{\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+\frac{1}{14}+\frac{1}{15}+\frac{1}{16}}^{8\text{ termes}}+....$$

Les blocs qui suivent regroupent 16 termes, 32 termes, etc. L'intérêt de ces regroupements est que la somme contenue dans chaque bloc est systématiquement plus grande que $\frac{1}{2}$, en effet :

$1+\frac{1}{2}$	supérieur à	$\frac{1}{2}$	
$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$	supérieur à	$\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$	qui font $\frac{1}{2}$
$\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}$	supérieur à	$\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}$	qui font $\frac{1}{2}$
$\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+\frac{1}{14}+\frac{1}{15}+\frac{1}{16}$	supérieur à	$\frac{1}{16}+...+\frac{1}{16}$	qui font $\frac{1}{2}$

... et ainsi de suite.

Puisqu'il y a une infinité de blocs, tous supérieurs à $\frac{1}{2}$, la somme $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+...$ ne peut en aucun cas être finie. Il existe de nombreuses règles en mathématiques qui permettent dans certains cas de décider si une somme infinie donne ou non un résultat fini. Malgré cela, l'étude de ces sommes infinies demeure extrêmement délicate ; voici deux résultats qui illustrent la difficulté du sujet. Si l'on raye un terme sur deux de la somme infinie des inverses :

$$\frac{1}{\cancel{1}}+\frac{1}{2}+\frac{1}{\cancel{3}}+\frac{1}{4}+\frac{1}{\cancel{5}}+\frac{1}{6}+\frac{1}{\cancel{7}}+...$$

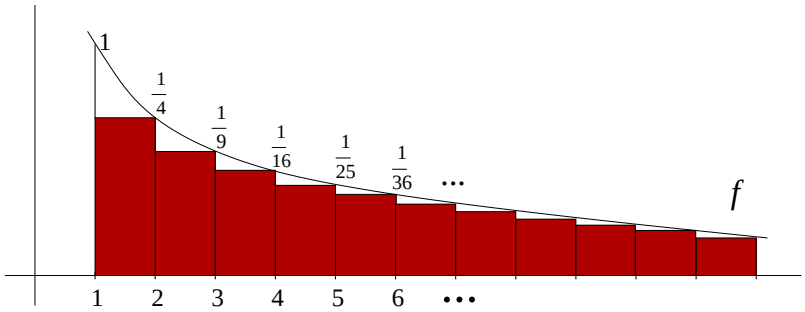
on obtient à nouveau la somme des inverses où chacun des termes serait divisé par deux, et par conséquent la valeur qui en résulte demeure infinie. En revanche, si on élimine *seulement* les fractions où apparaît le chiffre 9 :

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{\cancel{9}}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+\frac{1}{14}+\frac{1}{15}+\frac{1}{16}+\frac{1}{17}+\frac{1}{18}+\frac{1}{\cancel{19}}+\frac{1}{20}+...$$

on obtient étonnamment un résultat fini.

temps. Les témoignages de ses contemporains décrivent Euler comme un travailleur infatigable doté d'une mémoire effarante. On raconte entre autres qu'il connaissait les 9000 vers de l'*Enéide* par cœur. Tout cela n'empêchait pas Euler, selon les mêmes témoignages, de manifester une grande gentillesse et une grande accessibilité envers ceux qui l'ont côtoyé. En particulier dans sa propre famille, la patience et l'attention dont il fit preuve à l'égard de ses treize enfants sont demeurées célèbres. Devenu aveugle les douze dernières années de sa vie, il ne ralentit pas pour autant son rythme de travail et dicta ses publications à ses fils ou à ses serviteurs. Il meurt en 1783 à l'âge de 76 ans.

Précédemment, la représentation d'une somme infinie sous forme d'un gâteau que l'on partage a permis de saisir d'un seul coup d'œil la valeur de cette somme. En revanche pour la somme d'Euler il n'existe pas de représentation aussi simple. Néanmoins une visualisation graphique de cette somme est tout de même possible au travers d'une juxtaposition de rectangles dont chacun d'eux figure par son aire un terme de la somme. Plus précisément, on choisit des rectangles qui ont tous une largeur égale à 1 et une hauteur successivement égale à $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{16}$ *etc.* et on laisse provisoirement de côté le premier terme de la somme d'Euler. Sur cet escalier infini se superpose la courbe de la fonction f du mur infini.



Cette visualisation ne permet malheureusement pas de percevoir le lien entre la somme des inverses des carrés et le nombre π mais elle permet néanmoins d'obtenir, au moyen du calcul intégral, un renseignement précieux : cette somme infinie aboutit à une valeur finie, un résultat nullement évident en soi. En effet le calcul intégral a déjà permis plus haut de déterminer que l'aire du mur infini occupant toute la partie située sous la courbe, est précisément égale à 1. Par conséquent l'escalier infini qui est contenu dans cette zone, a une aire inférieure à 1. Après ajout du premier terme provisoirement occulté, la conclusion tombe d'elle-même :

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{36} + \ldots \quad \text{est plus petit que } 2.$$

Cette somme étant inférieure à 2 elle est donc finie. Ce fait n'est pas du tout une évidence et c'est le calcul intégral qui en fournit une démonstration éclairante.

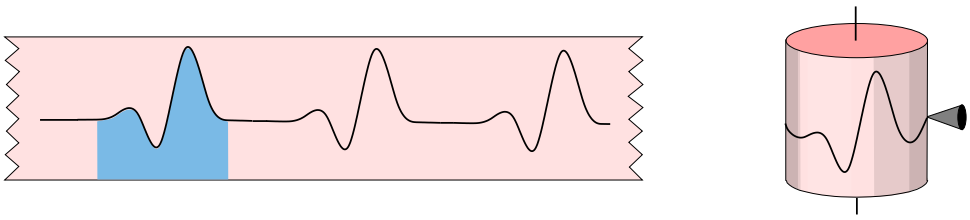
La formule de Stokes

A la naissance du calcul différentiel les mathématiques ont un visage bien différent de celui que nous leur connaissons aujourd'hui. L'Europe vient tout juste de sortir du Moyen-Age et les mathématiques n'ont pas encore une place bien définie dans la société. Le métier de mathématicien n'existe pas et, sauf pour de très rares exceptions, l'activité mathématique se pratique comme un loisir pendant le temps libre. Ainsi, le grand mathématicien Pierre de Fermat excerce la profession de Juge Suprême à la Cour Souveraine du Parlement à Toulouse, une fonction qui l'amène à traiter d'affaires mettant en jeu la vie des accusés. John Wallis rapporte qu'il n'a pu rencontrer Fermat car celui-ci était occupé par une « pénible affaire » dans laquelle un prêtre était convaincu d'abus de pouvoir. Fermat a fini par imposer une sentence qui a fait grand bruit : la condamnation au bûcher du prêtre fautif. Le cas de Fermat n'est pas isolé. Leibniz lui-même a excercé pour le Prince de Hanovre la fonction de diplomate auprès de Louis XIV, sa mission étant de détourner vers les Ottomans les intentions belliqueuses du Roi Soleil qui menaçaient les Etats Allemands. Bien entendu, dans ce monde du dix-septième siècle, l'activité mathématique ne pouvait concerner qu'une frange aisée de la population puisque l'éducation n'était accessible qu'à cette minorité. Même pour le grand Newton, l'accès à l'université n'allait pas de soi. Bien qu'issu d'une famille relativement favorisée de propriétaires terriens, il ne peut entrer à l'université de Cambridge qu'à la condition d'accepter le statut d'étudiant-valet. Il est alors au service des étudiants plus nantis que lui : il doit servir leurs repas, nettoyer leurs

chambres et même vider leurs pots. Ajoutons à ces réjouissances l'obligation d'assister debout aux repas de ses condisciples de haut rang. Ainsi se trouve consacrée jusque dans l'Université la structure pyramidale de la société de l'époque. De fait, la grande majorité des savants sont issus de familles de notables appartenant à la bourgeoisie ou à la noblesse. Descartes était de petite noblesse, seigneur du Perron, et aimait à le faire savoir ; Guillaume de l'Hospital, auteur du premier livre sur le calcul différentiel, était marquis de Sainte-Même et comte d'Autremont. Quant à Pierre de Fermat, il possédait une noblesse de robe liée à sa charge de magistrat. Il est bien évident que l'appartenance à l'aristocratie donnait toutes les facilités, et ce n'est pas tout à fait un hasard si c'est un marquis qui le premier publia un livre sur les découvertes de Newton et Leibniz.

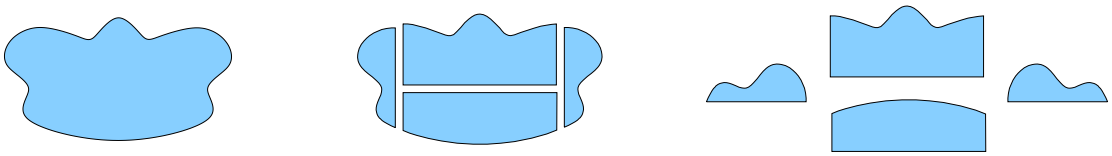
De nos jours, où le savoir est plus largement partagé, les origines sociales des mathématiciens se sont bien diversifiées et l'appartenance ou non à la grande aristocratie n'est plus réellement un critère déterminant. On assiste d'ailleurs à un renversement de situation avec l'anoblissement dans certains pays des grands mathématiciens. Ainsi Andrew Wiles qui est parvenu à démontrer le très fameux théorème de Fermat a été fait Chevalier de l'Empire Britannique en l'an 2000 par la Reine d'Angleterre ! Parmi les prédécesseurs de Wiles, il en est un dont le nom reviendra souvent dans ce chapitre, il s'agit de Stokes (portrait en tête de chapitre), celui-la même qui a donné son nom à la très célèbre *formule de Stokes*. Georges Stokes est issu d'une famille relativement modeste d'Irlande, son père était pasteur et sa mère, fille de pasteur. Après des études brillantes, il ne tarde pas à devenir l'un des plus grands physiciens du Royaume-Uni. Et tout comme Wiles, il fut anobli et devint ainsi en 1889 le baronnet Sir Georges Gabriel Stokes.

Que dit la fameuse formule qui porte son nom ? Elle donne un moyen direct et élégant pour connaître une aire à partir du contour qui englobe cette aire. En particulier elle est l'outil tout indiqué pour aborder le problème de Kakeya puisqu'elle permet non seulement de retrouver toutes les aires des figures qui sont apparues jusqu'à présent, mais elle donne également accès à l'aire de figures aux contours bien plus complexes. Cette formule, tout en se situant dans la veine du calcul intégral en repousse les limites. L'intégration en effet ne s'applique qu'à des domaines très particuliers : ceux qui se situent au dessous de la courbe d'une fonction. Or dans la notion de courbe d'une fonction il y a l'idée d'un déroulement sans retour en arrière.



Les aires concernées par la méthode d'intégration sont donc du type de celle qui est ombrée dans le dessin ci-dessus. L'aire d'un domaine en général reste accessible mais elle

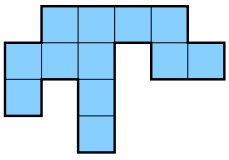
nécessite de se livrer à un découpage fastidieux afin d'obtenir des morceaux délimités par la courbe d'une fonction, l'aire de chacun des morceaux se calcule ensuite par la méthode d'intégration, une simple addition conduisant ensuite à l'aire du total.



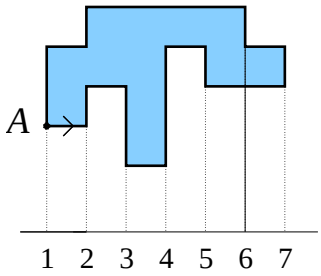
La formule de Stokes offre un calcul direct de l'aire emprisonnée par une courbe qui se referme sur elle-même. Pour le problème de Kakeya, où l'on est sans cesse confronté à de tels domaines, c'est donc la formule idéale. Elle donne à celui qui chemine le long d'une telle courbe l'aire totale qu'il aura circonscrite en retrouvant le point de départ. Cette formule s'avère très intéressante d'un point de vue conceptuel puisqu'elle révèle toute la force du lien qui existe entre le contour et l'intérieur d'une figure. Elle donne un éclairage précis sur un fait qui est relativement intuitif : connaître le contour d'une figure c'est connaître son intérieur.

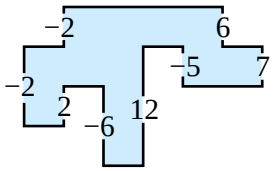
La méthode l'arpenteur

Fort de ce principe, comment dans un cas concret obtenir l'aire d'une figure au moyen d'un simple parcours le long de son bord ? Voyons cela sur une figure faite de carrés élémentaires et pour laquelle le calcul de l'aire ne pose aucun problème.



On peut en effet déterminer celle-ci en comptant le nombre de carrés, mais ce faisant, on s'attache à l'intérieur de la figure et non à son contour et l'on reste par conséquent dans l'esprit de la méthode d'intégration et non de la formule de Stokes. Il existe cependant un moyen de déterminer cette aire en oubliant complètement l'intérieur de la figure : on se contente d'arpenter son contour en effectuant quelques additions et soustractions simples.





Le long du parcours, on effectue une addition ou une soustraction à chaque arête verticale rencontrée, chacune d'entre elles étant numérotée selon sa position en horizontale comme l'indiqué dans l'illustration de gauche. A titre d'exemple et avec un départ au point A, la procédure se déroule de la façon suivante :

- la première arête est horizontale, elle compte zéro,
- on monte ensuite d'une case sur la verticale n°2 on compte $+1\times 2$,
- puis vient une horizontale comptant 0,
- puis la verticale n°3 descendante de longueur 2, on la compte -2×3,
- la suivante compte 0,
- la verticale en n°4 monte de trois cases, compte $+3\times 4$,
- *etc.*

On additionne le tout, le nombre obtenu donne l'aire de la figure :

$$\text{Aire } = 2 - 6 + 12 - 5 + 7 + 6 - 2 - 2 = 12.$$

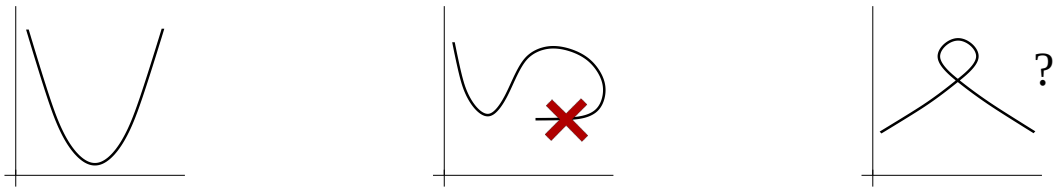
Bien sûr ce résultat est aussi le nombre de carreaux qui composent la figure. Ainsi on a bien obtenu l'aire du domaine à partir de données recueillies le long du contour. En fait cette démarche peut s'appliquer à n'importe quelle figure composée de carreaux. On convient de l'appeler la *méthode de l'arpenteur*.

Comment passer à des catégories beaucoup plus larges de formes qui seraient délimitées non plus par une succession de petits segments verticaux et horizontaux mais par toute une courbe ? Autrement dit, comment généraliser la méthode de l'arpenteur ? La formule qui permet une telle généralisation est précisément la formule de Stokes, elle est fondée sur le même principe que la méthode de l'arpenteur mais sa mise en œuvre recèle une difficulté : il faut être capable de décrire mathématiquement ce que l'on appelle « arpenter »une courbe.

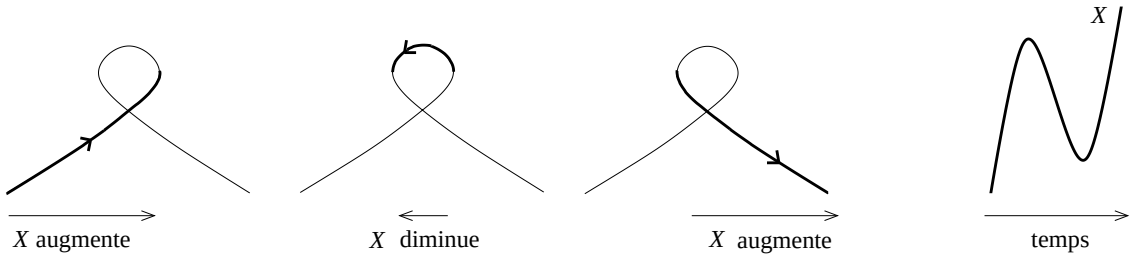
La formule de Stokes

Jusqu'à présent chaque courbe étudiée représentait une fonction et ceci interdisait tout retour en arrière lors du tracé, en effet à chaque valeur x en horizontale correspond un seul point sur la courbe. La premiÃ¨re courbe ci-dessous représente bien une fonction ce qui n'est pas le cas des deux autres. Nous allons maintenant être confrontés à des courbes plus générales susceptibles de circonvolutions et de croisements, dont la boucle représentée

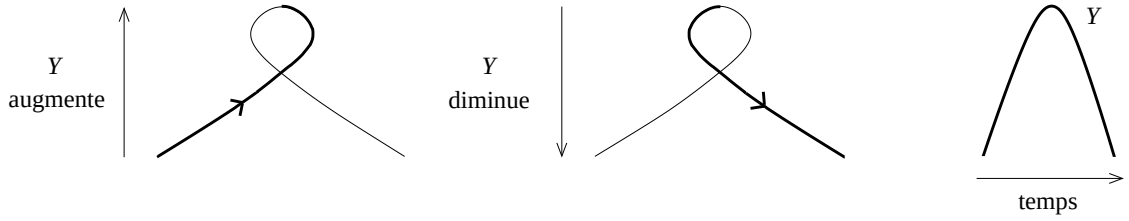
à droite est un exemple. Se pose alors le problème de décrire mathématiquement de telles courbes.



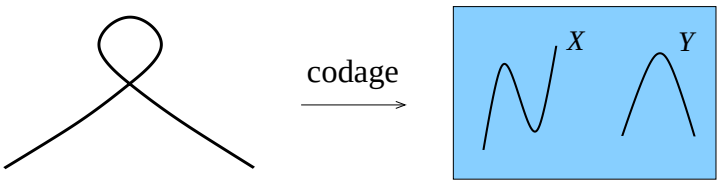
En particulier un contour comporte forcément un retour en arrière si bien qu'une seule fonction ne permet donc plus de le décrire. Pour résoudre cette difficulté on distingue, comme on l'a fait pour la méthode de l'arpenteur, le parcours en horizontale du parcours en verticale. Dans un quadrillage les mouvements en verticale et en horizontale ont lieu alternativement, on avance d'une case puis on monte de deux, etc. Dans le cas d'une boucle les mouvements ont lieu simultanément et de façon continue. Si l'on désire représenter chacun de ces deux mouvements, il apparaît deux courbes, c'est-à-dire en fait deux fonctions, que l'on appelle X et Y. La figure ci-dessous représente le déplacement en horizontale, c'est-à-dire la fonction X, lors du parcours d'une courbe en forme de boucle.



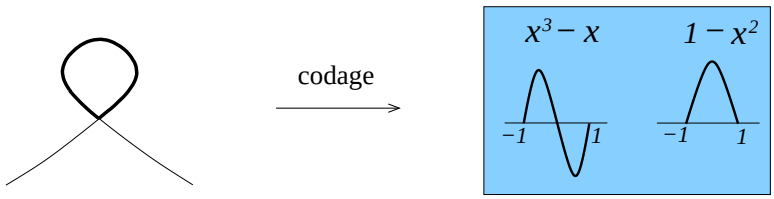
La courbe la plus à droite reproduit la variation de X au cours du temps, cette courbe monte puis descend puis remonte comme le fait X dans les trois premiers dessins. En verticale le déplacement se résume à deux mouvements, l'un montant l'autre descendant, la courbe qui en résulte a la forme d'une parabole renversée.



Ces fonctions X et Y vont jouer par la suite un rôle crucial car ce sont elles qui interviendront dans la formule de Stokes et qui permettront de calculer l'aire englobée par la courbe. Les fonctions X et Y ont aussi un autre rôle, elles forment un codage de la boucle, autrement dit, la donnée de ces deux fonctions permet de reconstituer la courbe initiale, elles la décrivent complètement.



Dans le cas d'une figure en escalier l'application de la méthode de l'arpenteur nécessitait une connaissance pas à pas de son contour, dans le cas de la boucle cette connaissance précise du contour est donnée par les expressions mathématiques des deux fonctions X et Y. Sans entrer dans les détails, les expressions mathématiques qui correspondent à la boucle que l'on étudie sont $x^3 - x$ pour X et $1 - x^2$ pour Y.



Connaître le contour c'est connaître le domaine lui-même, la donnée de ces deux fonctions doit donc suffire à calculer l'aire de ce domaine, c'est exactement ce que propose la formule de Stokes dont voici un descriptif :

- on commence par calculer la dérivée de la fonction Y,
- on fait le produit de cette dérivée par la fonction X, on obtient la fonction XY',
- on calcule une intégrale de cette nouvelle fonction.

En résumé cette formule de Stokes s'écrit :

$$\text{Aire du domaine } = \int_a^b XY'.$$

Les valeurs a et b qui apparaissent dans la formule sont celles qui délimitent x dans les fonctions X et Y, par exemple pour la boucle ces valeurs sont -1 et 1. On a également l'habitude d'écrire cette formule sous une forme qui exprime davantage ce lien entre contour et intérieur :

$$\text{Aire}(\ ) = \int_{\ } XY'$$

et on lit *intégrale de XY' le long du contour.* Ainsi, connaissant les deux fonctions X et Y qui décrivent la boucle, on est ramené pour calculer son aire à déterminer une intégrale : l'intégrale d'une fonction f qui n'est autre que le produit des deux fonctions X et Y'. Dans le cas de la boucle cette intégrale se calcule facilement et on trouve :

Calcul de l'aire de la boucle

Une fois le codage effectué la formule de Stokes donne l'aire de la boucle au moyen d'une intégrale :

$$\int_{-1}^{1} XY',$$

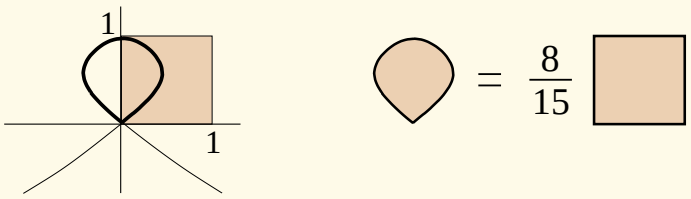
où les fonctions X et Y sont respectivement x^3-x et $1-x^2$. Or la fonction $1-x^2$ se dérive en $-2x$, par conséquent le produit XY' s'écrit $(x^3-x)\times(-2x)$ c'est-à-dire $2x^2-2x^4$. Dans un souci de clarté, on désigne par f le produit XY'. On a alors :

$$f(x) = 2x^2 - 2x^4.$$

Reste à calculer l'intégrale de cette fonction f entre les valeurs -1 et 1. Pour cela il suffit de trouver une fonction F dont la dérivée est f. La fonction dont l'expression est $F(x) = \frac{2}{3}x^3 - \frac{2}{5}x^5$ en est une, comme cela se vérifie grâce au diagramme :

$$\begin{array}{rccccccc} & F(x) & = & \frac{2}{3} & x^3 & - & \frac{2}{5} & x^5 \\ \text{dérivation} & \downarrow & & & \downarrow & & & \downarrow \\ & f(x) & = & \frac{2}{3} & 3x^2 & - & \frac{2}{5} & 5x^4 \end{array}$$

L'aire de la boucle vaut donc $F(1)-F(-1) = (\frac{2.1^3}{3} - \frac{2.1^4}{5}) - (\frac{2.(-1)^3}{3} - \frac{2.(-1)^4}{5}) = \frac{8}{15}$. Le dessin ci-dessous illustre ce résultat en donnant la comparaison des aires de la boucle et du carré de côté 1. Il montre que l'aire de cette boucle est légèrement supérieure à la moitié de celle du carré.



Les courbes décrites par deux fonctions X et Y sont habituellement appelées *courbes paramétrées* et en règle générale l'inconnue x, qui représente en fait chaque instant du parcours, est notée t et par conséquent les fonctions X et Y de la boucle s'écriraient respectivement t^3-t et $1-t^2$. A l'instant $t=0$ on se trouve donc au point de coordonnées $X=0$ et $Y=1$ c'est-à-dire au sommet de la courbe : au temps $t=1$, on atteint le point $X=0$ et $Y=0$ qui est le noeud de la boucle où l'on se trouvait également à l'instant $t=-1$. Plus qu'une simple courbe, c'est un déplacement au fil du temps que définissent les fonctions X et Y. Cette définition paramétrée des courbes intègre donc naturellement la notion de mouvement, elle est donc particulièrement adaptée à l'application des grandes lois de la physique qu'il s'agisse de la course des planètes ou d'une trajectoire de particule.

$$\text{Aire de la boucle } = \int_{-1}^{1} f = \frac{8}{15}.$$

Ce calcul est effectué dans tous les détails dans l'encart coloré de la page précédente. Les principes de la méthode de l'arpenteur n'apparaissent pas immédiatement à la lecture de la formule de Stokes pourtant il existe un lien important qui relie les deux formules. Ce lien qui n'est pas évident au premier abord, apparaît plus clairement dans le tableau ci-dessous :

Méthode de l'arpenteur	**Formule de Stokes**
– On distingue parcours horizontal et vertical,	– On code en deux fonctions X et Y,
– on multiplie à chaque pas une position X par une différence d'altitude,	– on multiplie la fonction X par la dérivée Y',
– on fait la somme le long du parcours.	– on fait une somme « intégrale » le long du parcours.

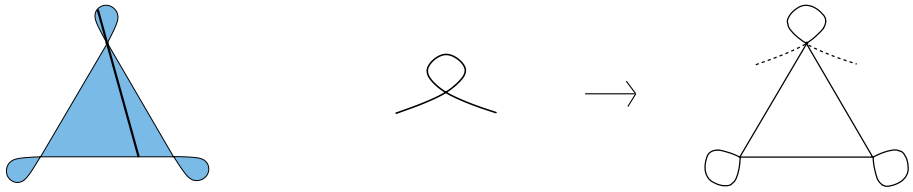
En particulier, une application à la lettre de la formule de Stokes à un contour en escalier restitue fort logiquement les mêmes calculs que ceux de la méthode de l'arpenteur :

Aire ( ) = $\int_{\text{ }} XY' = 2-6+12-5+7+6-2-2.$

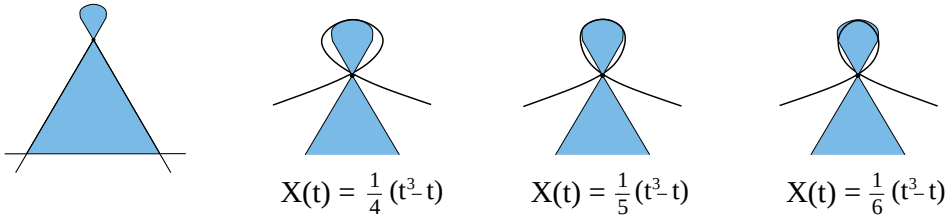
En réalité pour un domaine en escalier ces deux méthodes sont équivalentes mais bien entendu, le champ d'action de la formule de Stokes ne se résume pas à ce type de domaines. On dit que cette formule généralise la méthode de l'arpenteur qui peut alors s'appliquer à une très grande diversité de contours.

Avancée sur la question de Kakeya

Par sa grande généralité la formule de Stokes est l'outil idéal pour envisager de nouvelles figures répondant à la question de Kakeya. La meilleure figure trouvée jusqu'à présent, le triangle à paraboles, tire partie d'un nouveau mouvement de l'aiguille : au lieu d'effectuer de simples rotations, l'extrémité de l'aiguille glisse sur le long des côtés. Lorsque l'aiguille tourne autour de chaque sommet en balayant la totalité du triangle, ce sont trois petites boucles qui apparaissent à chaque extrémité. Dans la configuration représentée ci-dessus le triangle central occupe les trois quarts de l'aiguille et la hauteur des petites boucles un quart.



On l'a vu la formule de Stokes donne aisément l'aire d'une boucle, le problème est donc maintenant d'adapter les dimensions de notre boucle afin qu'elle colle au mieux à celle que dessine l'aiguille. Il se trouve qu'il est très facile de réaliser cette opération, rétrécir la boucle c'est simplement « rétrécir » les fonctions X et Y. Par exemple pour diviser la hauteur par quatre, il suffit de diviser la fonction Y par quatre. La boucle obtenue possède alors la hauteur recherchée, il ne reste plus qu'à régler la largeur, c'est-à-dire à choisir par quel nombre diviser la fonction X. Quelques essais montrent que le nombre 5 est une valeur qui convient bien.



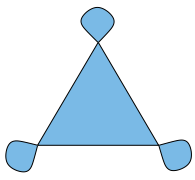
En horizontale :	$\frac{1}{4}(x^3 - x)$	$\frac{1}{5}(x^3 - x)$	$\frac{1}{6}(x^3 - x)$

Au total la boucle que nous choisissons est donc décrite par les fonctions :

$$\frac{1}{5}(x^3 - x) \text{ pour } X,$$

$$\frac{1}{4}(1 - x^2) \text{ pour } Y.$$

En plaçant une telle boucle en chaque sommet d'un triangle équilatéral de hauteur trois quart, on obtient un *triangle à boucles* qui permet la rotation de l'aiguille.



Chacune de ces trois boucles est celle du paragraphe précédent réduite d'un facteur 5 en horizontale et d'un facteur 4 en verticale, leur aire est donc divisée par 20 (le produit de

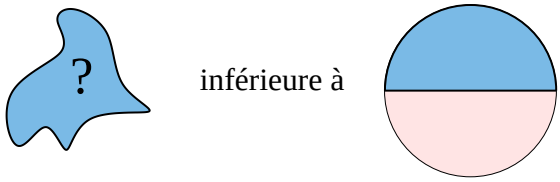
4 par 5). L'aire de la boucle initiale étant égale à $\frac{8}{15}$, l'aire de la boucle ainsi construite est donc de :

$$\frac{8}{15} : 20 = \frac{2}{75}.$$

L'aire de la figure est donc égale à l'aire des trois boucles augmentée de celle du triangle, soit :

$$\text{Aire du triangle à boucles } = 0.40475...$$

Le triangle à paraboles dont l'aire valait 0.41296... est donc légèrement supplanté. Plus intéressant la valeur 0.40475... laisse entrevoir un nouveau défi : on se souvient que la toute première figure à laquelle on pense pour répondre au problème de Kakeya est le disque dont l'aire est $\frac{\pi}{4}$, l'aire du demi-disque vaut donc $\frac{\pi}{8} = 0.39269....$ Coïncidence, cette valeur est précisément l'aire de la deltoïde. Trouver une figure d'aire inférieure au demi-disque et dans laquelle on puisse retourner l'aiguille revient donc à découvrir une surface encore meilleure que ce que Kakeya imaginait de mieux.

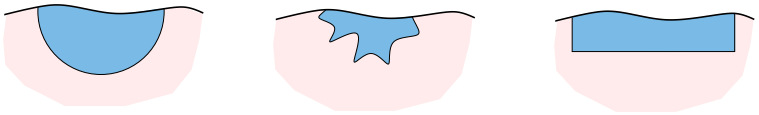


Il se trouve que toutes les constructions développées jusqu'à présent ne permettent pas de répondre à ce défi. Nous le relèverons donc dans le prochain chapitre.

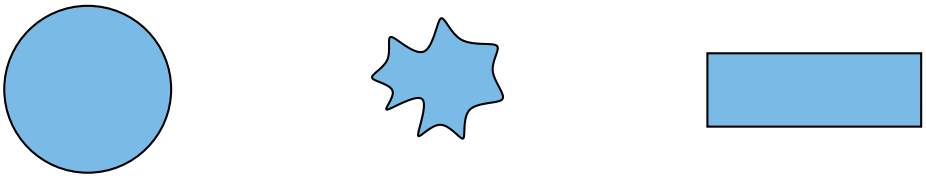
Bulles de savon

Des questions mathématiques très profondes trouvent parfois leur origine dans des problèmes très anciens. C'est le cas du célèbre *problème de l'isopérimétrie* dont on trouve la trace dans une légende datant de la plus haute antiquité : celle de la fondation de Carthage. Cette légende raconte que Didon, fille du roi de Tyr, devenue reine à la mort de ce dernier, fut chassée par son frère Pygmalion et dut s'enfuir précipitamment avec une partie de l'artistocratie tyrienne. Après de nombreuses aventures ils finirent par accoster sur les côtes africaines et demandèrent au roi Hiarbas de leur accorder une terre pour s'intaller. Perfidement, celui-ci leur promit « autant de terre que peut contenir la peau d'un bœuf ». La reine Didon respecta scrupuleusement ces paroles, elle découpa une peau en lanières si fines qu'elle put encercler, en les mettant bout-à-bout, un vaste territoire : Carthage était née.

Le problème de la reine Didon, une fois les lanières découpées, est donc d'entourer, avec la longueur formée par celles-ci, la surface la plus grande possible. Le reine Didon a choisi selon la légende de disposer ses lanières en arc de cercle, alors que beaucoup d'autres solutions s'offraient à elle.

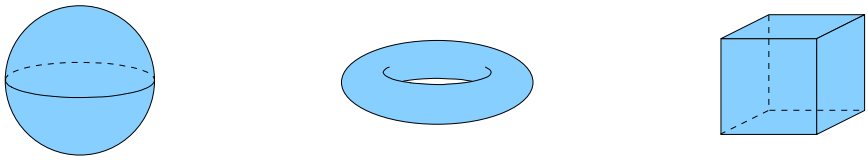


Le choix de la reine, bien qu'il paraisse évident, n'est pas si facile à justifier, il relève du problème de l'isopérimétrie qui s'énonce mathématiquement de la façon suivante : *avec un périmètre donné, quelle figure faut-il former pour circonscrire la plus grande surface possible ?* Le problème du mathématicien est donc un peu différent de celui de la reine Didon. On dispose toujours d'un périmètre donné qui est la longueur totale des lanières, en revanche, le contour que l'on cherche à former avec ce périmètre doit se refermer sur lui-même. La raison de cette formulation est une certaine simplification du problème, la figure recherchée n'a pas à être adossée à une forme particulière, la côte. Le problème devient alors libre de cette contrainte, il est en quelque sorte plus absolu.

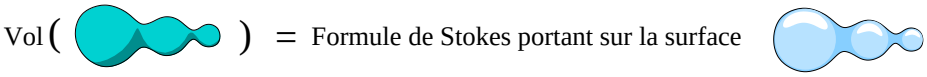


La solution au problème de l'isopérimétrie est la plus simple à laquelle on puisse penser : le périmètre étant donné c'est le cercle qui entoure la plus grande surface. Toutefois l'évidente simplicité de ce résultat est trompeuse, il fut extrêment délicat à démontrer rigoureusement et mobilisa les efforts de nombreux mathématiciens. Toute la difficulté réside dans l'éventail infini des figures possibles, comment être certain *qu'il n'existe pas* parmi elles un candidat plus performant que le disque ? En quête d'une réponse, les mathématiciens ont eu recours depuis l'antiquité, à de nombreuses façon de raisonner et ne sont parvenus à une démonstration convainquante qu'à la fin du XIX$^{\text{ème}}$ siècle. Il n'est bien sûr pas question de présenter une telle démonstration mais plutôt d'imaginer une voie possible pour aborder ce problème. Les questions isopérimétriques mettant en relation un contour et son intérieur, c'est bien entendu à la formule de Stokes que l'on pense. Il se trouve en effet qu'une des démonstrations les plus élégantes que l'on connaisse à l'heure actuelle découle directement de celle-ci. Elle a été découverte par M. Gromov en 1986, soit plus d'un siècle après la première démonstration rigoureuse : l'approche la plus naturelle n'est pas forcément celle qui aboutit le plus vite.

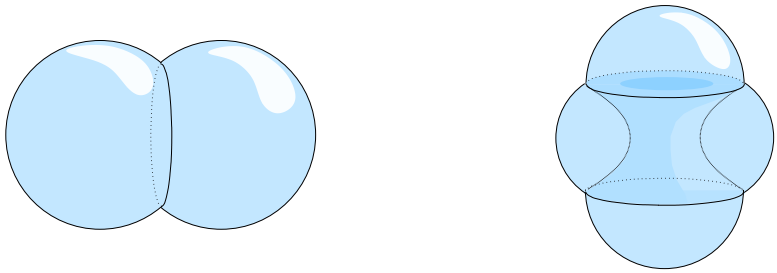
Mais que se passe-t-il si l'on se pose les mêmes questions dans l'espace à trois dimensions, à savoir *comment, dans une aire donnée, englober le plus grand volume possible ?*



A nouveau, toute la difficulté du problème réside dans le nombre infini de figures qui s'offrent à nous (trois d'entre elles ont été dessinées ici) et à nouveau, la meilleure solution est la plus naturelle : la sphère. La démonstration de ce résultat, comme on peut s'en douter, est loin d'être immédiate, elle nécessite de découvrir un lien entre la surface des figures, leur « peau », et le volume qu'elles contiennent. L'outil adéquat serait donc une formule de Stokes en trois dimension :



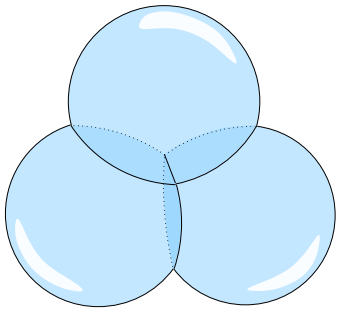
Une telle formule existe, qui est une généralisation à la dimension trois de celle présentée dans ce chapitre. Avec cette nouvelle formule la démonstration élégante évoquée plus haut reste valide. Encore une fois, c'est la formule de Stokes qui donne une clé pour répondre au problème de l'isopérimétrie dans la troisième dimension. L'observation d'une bulle de savon, qui est bien sphérique comme chacun sait, confirme ce résultat. Mais les choses se compliquent rapidement lorsque l'on envisage deux bulles de savon, c'est-à-dire lorsque l'on pose le problème de l'isopérimétrie pour deux volumes : *comment, avec une aire donnée, enfermer deux volumes égaux les plus grands possibles ?*



Dans le champ infini des figures possibles, c'est la double-bulle représentée à gauche qui donne la solution. Il s'agit de deux sphères accolées séparées par un film plat, une configuration que l'on observe facilement dans la nature. La figure de droite représente une sphère enchâssée dans un tore, c'est une autre possibilité, un peu inattendue, mais non optimale, pour séparer deux volumes égaux. Contrairement à la double-bulle, elle ne se rencontre pas dans la nature. Même si cette solution de la double-bulle est visuellement évidente, il ne faudrait pas penser qu'il est facile de le *démontrer*, c'est-à-dire d'écarter tous les autres candidats. Cette légère variante du problème de l'isopérimétrie s'est avérée en réalité d'une extrême difficulté. Les mathématiciens n'en sont venus à bout que très

récemment puisque la démonstration a été publiée en 2000.

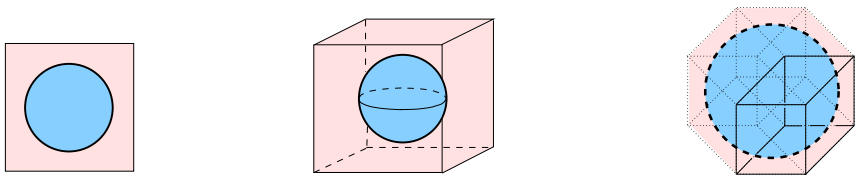
Il n'y a bien sûr aucune raison de se limiter à deux bulles, mais comme on s'en doute, le problème de l'isopérimétrie pour trois volumes égaux reste à l'heure actuelle sans réponse. L'observation de la façon dont s'agglutinent les bulles de savon suggère une réponse possible : la triple-bulle. Bien entendu le fait que cette triple-bulle puisse se réaliser effectivement dans la nature ne démontre nullement qu'il s'agit bien du partage optimal de trois volumes. C'est là un des aspects frustrants du problème de l'isopérimétrie, la visualisation des solutions probables ne semble être d'aucune aide pour la résolution.



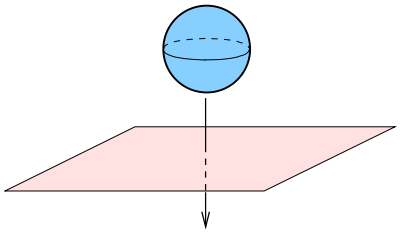
Néanmoins cet inconvénient n'en est plus un lorsqu'il s'agit de passer à la quatrième dimension, c'est-à-dire si l'on envisage le problème d'isopérimétrie non plus dans un espace sensible à deux ou trois dimensions mais dans dans un espace à quatre dimensions qui ne nous est pas directement perceptible. Dans la quatrième dimension le problème de la reine Didon s'énonce de la même manière que dans un espace sensible à deux ou trois dimensions : *comment délimiter de la façon la plus économe possible une portion d'espace en dimension 4 ?*

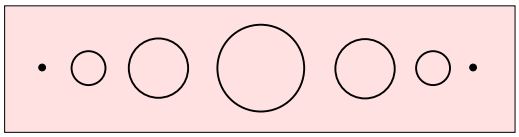
La quatrième dimension n'étant plus celle de notre réalité quotidienne, chaque terme de cet énoncé nécessite un travail de l'esprit. Il est bien difficile d'imaginer par exemple ce que pourrait être ne serait-ce qu'une « portion d'espace » et plus encore demesurer son caractère « économe ». Il est cependant possible de se faire une idée de ce à quoi ressemble un espace de dimension quatre, non pas à travers une vision véritable mais au moyen d'un raisonnement par analogie. Un espace de dimension deux est un espace plan, pour le transformer en un espace de dimension trois il suffit de faire « pousser une hauteur ». Par extension l'espace de dimension quatre est un espace à trois dimensions auquel on aurait fait pousser une hauteur.

La hauteur en question doit être *en dehors de* l'espace d'origine, elle peut être vue comme une flèche pointant à angle droit hors de la page du livre. Dans un tel espace, qui sort du cadre de la page, la représentation d'un objet reste donc très délicate puisqu'au final il faudra bien revenir sur la feuille pour le dessiner. Dans les figures ci-dessous, on a représenté, un cercle, une sphère, et une *hypersphère*, l'analogue de la sphère pour la quatrième dimension. Force est de constater que la représentation de cette dernière n'est pas très éclairante.

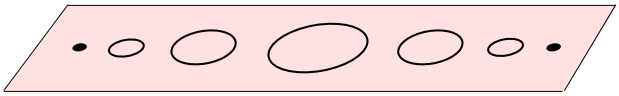


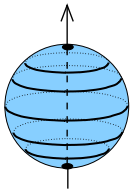
Le lien qui unit ces trois objets est leur définition même, seul l'espace dans lequel ils sont considérés change. En effet, chacun d'eux est composé des points qui sont équidistants d'un même point central. En dimension deux cela donne un cercle, en dimension trois, une sphère, et pour la quatrième dimension, une hypersphère. Comment donner maintenant une représentation de l'hypersphère qui soit plus éloquente ? Pour répondre à cette question il est crucial de remarquer que ce n'est pas tant l'espace à quatre dimensions qui pose problème mais plutôt le *passage* de la troisième à la quatrième dimension, c'est-à-dire l'ajout d'une dimension. Or ajouter une dimension est une opération que l'on peut aisément réaliser dans l'espace ordinaire : par exemple c'est précisément ce qui est fait dans les dessins ci-dessus lorsque l'on passe du cercle à la sphère. Un examen attentif de ce passage va permettre d'aboutir à l'hypersphère par simple analogie. Si avec un effort d'imagination on conçoit un personnage virtuel vivant dans un espace à deux dimensions, c'est-à-dire un être sans épaisseur et complètement inclus dans le plan, celui-ci serait alors dans l'incapacité de voir la sphère qui « vit » quant à elle dans l'espace de dimension trois. Cet être imaginaire serait confronté, en dimensions inférieures, à la difficulté que l'on peut éprouver à concevoir l'hypersphère à partir de la dimension trois. Il y a pourtant moyen pour ce personnage fictif de se faire une idée précise de la sphère, à condition que celle-ci entre en contact avec le plan où il vit. Plus précisément, il faut que la sphère traverse progressivement l'espace plat où habite le personnage. Elle s'offrirait alors à lui comme une succession continue de cercles.



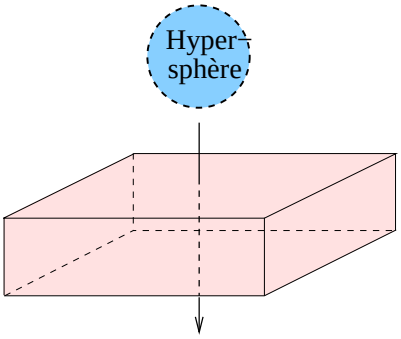


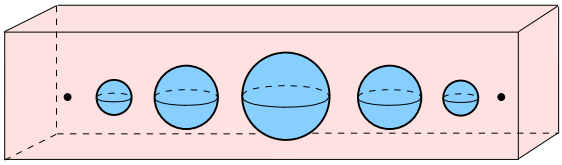
Voilà donc, pour un habitant de la deuxième dimension, une manière de voir la sphère : un film qui se déroule et sur lequel apparaît un cercle qui grossit puis rétrécit avant de disparaître. Ce procédé de représentation est appelé *cinéma* par les mathématiciens. Pour nous, qui évoluons dans un espace à trois dimensions, il est possible d'empiler les cercles qui composent ce film, le long de la troisième dimension, de façon à reconstruire la sphère initiale.





De la même manière, si on imagine une hypersphère qui traverse notre espace à trois dimension, le film obtenu est alors le suivant :





L'habitant d'un monde à quatre dimensions pourrait sans peine empiler les sphères qui composent ce film le long de la quatrième dimension afin de reconstruire l'hypersphère dans son intégralité et appréhender cet objet globalement. Exactement comme cela se passe en dimension deux et trois, il verrait un objet final qui englobe une partie de l'espace ambiant à quatre dimensions. Dans notre monde à trois dimension, ce film constitue une représentation fidèle de l'hypersphère et offre ainsi une vue sur la quatrième dimension. Plus que cela, il montre que les objets qui habitent dans la quatrième dimension ne sont pas inaccessibles. Les mathématiciens savent cela depuis fort longtemps, c'est pourquoi ils ne

limitent pas leurs raisonnements aux dimensions deux et trois mais envisagent également la dimension quatre et les dimensions plus grandes. Sans entrer dans l'examen de ces grandes dimensions, on peut simplement noter que le passage d'une dimension à la suivante est exactement analogue au passage de la dimension deux à la dimension trois. Chaque dimension a son hypersphère, qui peut se voir comme un empilement d'hypersphères de la dimension précédente.

Si l'on revient au problème de la reine Didon en toute dimension, à savoir rechercher la figure qui englobe la plus grande portion d'espace possible, une analogie avec les dimensions deux et trois conduit tout naturellement à choisir l'hypersphère comme candidat privilégié. Cette intuition se vérifie bien, le théorème général de l'isopérimétrie s'énonce en effet ainsi :

Dans un espace de dimension quelconque, c'est l'hypersphère qui permet de circonscrire une portion d'espace donnée de la manière la plus économe qui soit.

En prolongement de ce qui se passe en dimension deux et trois, il existe une formule de Stokes en toute dimension qui permet de démontrer ce résultat de façon élégante. Dans ce contexte, la *formule de Stokes* présentée dans ce chapitre n'est qu'un cas très particulier d'une formule de Stokes en toute dimension. Il est d'usage d'appeler ce cas très particulier, c'est-à-dire celui de la dimension deux, *formule de Green-Riemann.*

Les équations différentielles

Les équations différentielles sont présentes dans tous les domaines de la science, elles régissent le mouvement des planètes, les lois de l'électricité, la dynamique des populations, etc. La première d'entre elles est apparue en même temps que le calcul différentiel avec Newton et Leibniz aux alentours des années 1700, elle a permis de déduire, à partir d'une loi fondamentale, les trajectoires des planètes autour du soleil. Plus encore, elle a montré que la connaissance à un instant donné de la position et de la vitesse de chaque planète suffit à prédire leur trajectoire *ad vitam aeternam*. Avec elle débute une période de foi absolue en l'idéal déterministe, il s'agit de traduire chaque phénomène naturel sous forme d'équations différentielles, lesquelles permettent ensuite, à partir d'une situation donnée, de décrire l'évolution dudit phénomène pour tous les temps futurs et passés. Dans l'élan et l'optimisme de leur découverte, les savants ont alors pensé qu'ils étaient là en présence de l'outil universel qui allait permettre de décrire les lois de la nature comme en témoigne cette phrase du mathématicien et astronome Pierre Simon Laplace (portrait en tête de chapitre) : « La courbe décrite par une simple molécule d'air ou de vapeur est réglée d'une manière aussi certaine que les orbites planétaires [...]. Une intelligence qui, pour un instant donné, connaîtrait toutes les forces dont la nature est animée et la situation respective des êtres qui la composent, si d'ailleurs elle était assez vaste pour soumettre ces données à l'analyse, embrasserait dans la même formule les mouvements

des plus grands corps de l'univers et ceux du plus léger atome : rien ne serait incertain pour elle, et l'avenir, comme le passé, serait présent à ses yeux ≫. Depuis son origine ce programme n'a cessé de connaître des succès spectaculaires. Un des plus marquants est peut-être la prédiction de l'existence de la planète Neptune puisqu'il a suffit de pointer la lunette à l'endroit prédit par les calculs pour observer cette nouvelle planète. Cependant, c'est cette même étude du système solaire qui verra naître les premières incertitudes quant au bien-fondé de ce programme déterministe. En effet, en cherchant à comprendre le comportement des planètes sur des temps très longs, le mathématicien Henri Poincaré a découvert l'existence de phénomènes chaotiques. Ces phénomènes demeurent encore aujourd'hui un sérieux obstacle aux prédictions à moyen terme. Ils n'offrent pas de contradiction théorique au déterminisme mais en marquent les premières limites.

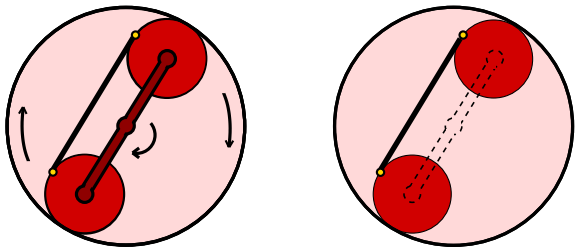
Les équations différentielles sont par nature radicalement différentes de celles que l'on étudie dès les années de collège : les équations algébriques. Ces dernières font intervenir une inconnue symbolisée par la lettre x que l'on essaie de déterminer au moyen de calculs algébriques. Par exemple l'équation $2x - 1 = 0$ donne pour solution $x = \frac{1}{2}$. Dans une équation différentielle, l'inconnue n'est plus un simple nombre mais une fonction toute entière que l'on symbolise par la lettre f. De plus, comme leur nom l'indique, ces équations font intervenir le calcul différentiel, c'est-à-dire le calcul de dérivées. A titre purement illustratif on peut citer l'équation différentielle $2f' - f = 0$, qui signifie que l'on cherche une fonction f égale au double de sa dérivée. La résolution de telles équations, c'est-à-dire la recherche de la fonction inconnue f, relève du savoir-faire du mathématicien. Bien sûr toutes les équations différentielles ne sont pas de la même difficulté : si les plus simples d'entre elles procèdent de petites manipulations un peu similaires à celles que l'on effectue pour les équations algébriques, d'autres en revanche demeurent rétives à toutes formes de résolution.

C'est notamment le cas des équations de Navier-Stokes. Elles traduisent des phénomènes naturels qui sont au cœur des prévisions météorologiques, des études d'aérodynamique et plus généralement, de tous les mouvements de fluide. Pourtant, on est bien loin à l'heure actuelle de savoir traiter de manière satisfaisante ces équations. En fait, il se trouve que les savants se heurtent à un problème qui peut sembler incongru mais qui est encore plus fondamental : celui de savoir s'il existe des solutions à ces équations. En somme, alors que l'on peut observer sans peine toute sorte d'écoulements dans la nature, il est incroyablement difficile de les redécouvrir mathématiquement en partant des équations de Navier-Stokes. Ces problèmes font partie des plus grandes questions qui se posent en mathématiques : un des sept problèmes du millénaire, doté par la fondation Clay d'un prix d'un million de dollars, est justement de percer à jour le secret de ces fameuses équations.

La deltoïde

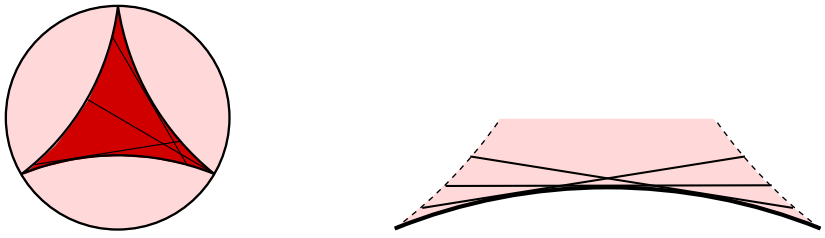
Une nouvelle façon d'aborder le problème de Kakeya conduit tout naturellement à une équation différentielle : au lieu d'envisager directement des figures à l'intérieur desquelles

l'aiguille peut se retourner, on s'intéresse aux mouvements possibles de l'aiguille afin d'en extraire les figures qu'ils engendrent. Ainsi, au lieu de prendre la figure comme point de départ, on considère un mouvement de l'aiguille puis on cherche la figure qui « colle au mieux » à ce mouvement.

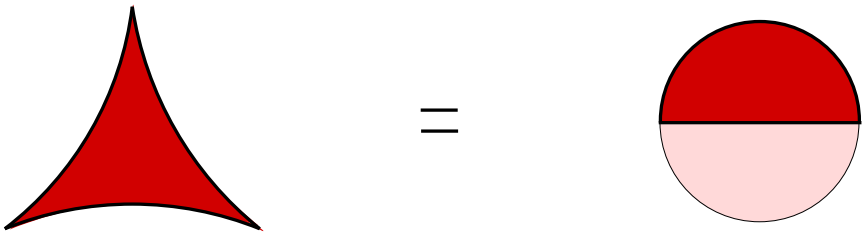


Et précisément, au moment où il formule sa question, Kakeya a déjà en tête une façon de retourner l'aiguille particulièrement simple et harmonieuse, à tel point qu'elle peut se décrire par un petit mécanisme élémentaire. Ce mécanisme se compose de deux roulettes identiques et d'un cercle trois fois plus grand. On relie les axes des roulettes par une tige de sorte que cet ensemble puisse tourner à l'intérieur du grand cercle comme l'indique la première des deux figures qui précédent. On suppose que tout cet ensemble roule à l'intérieur du grand cercle et on fait abstraction de la tige de liaison. On relie alors les deux roulettes par une aiguille - conformément au second dessin ci-dessus - et on suit le mouvement de l'aiguille dans ce manège.

On observe que les extrémités de l'aiguille décrivent une courbe comportant trois portions similaires, il s'agit d'une deltoïde. Au cours de ce mouvement tout se passe comme si l'aiguille roulait sur chacune des trois portions de la courbe successivement. Le long de son trajet elle semble ainsi épouser le contour de la figure et utiliser au mieux tout l'espace disponible.



La formule de Stokes appliquée au contour de cette deltoïde donne une aire égale $\frac{\pi}{8}$, soit 0.39269... Il est remarquable que cette valeur soit exactement la moitié de l'aire de la première figure qui vient à l'esprit quand on aborde le problème de Kakeya : le disque ayant pour diamètre l'aiguille.



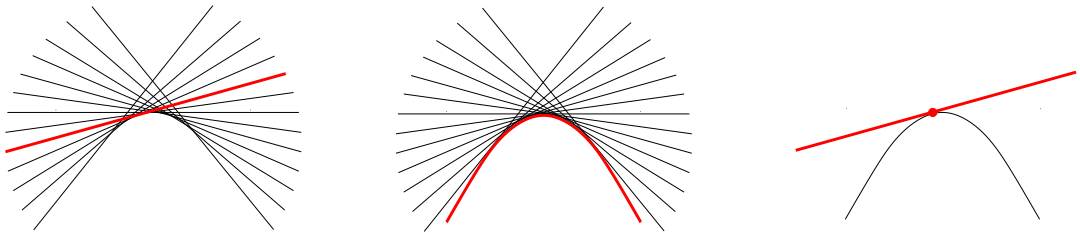
En réalité la deltoïde est la plus économe en aire de toutes les figures construites jusqu'à présent. Par sa symétrie, par la façon dont l'aiguille la parcourt, on peut penser que c'est elle qui répond au problème de Kakeya. Il ne s'agit là que d'une conjecture c'est-à-dire d'un fait dont on a quelques raisons de penser qu'il est vrai mais qui cependant reste à démontrer. Pour fixer les idées on décide de l'appeler la *conjecture de la deltoïde* :

La deltoïde est la meilleure figure quant au problème de Kakeya.

Confronté à une conjecture, il n'y a que deux alternatives : soit on est convaincu de sa véracité auquel cas on s'attache à en trouver une démonstration, soit au contraire on en doute et on cherche alors un contre-exemple. Dans le cas de la conjecture de la deltoïde un tel contre-exemple prendrait la forme d'une figure plus petite que la deltoïde permettant néanmoins la rotation de l'aiguille. On propose d'en construire un dans les lignes qui suivent.

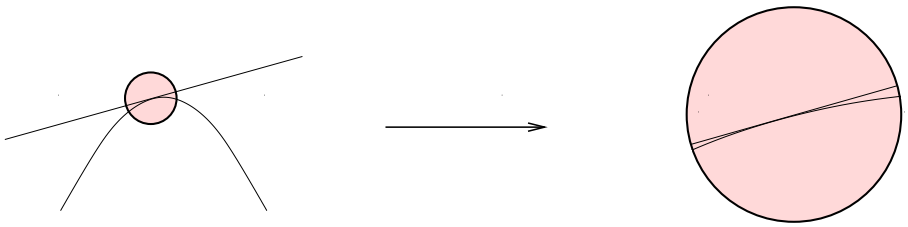
Enveloppe de droites

Dans la deltoïde et contrairement à toutes les figures précédentes, l'aiguille épouse dans son mouvement la courbe qui délimite le domaine. Pour cette raison ce domaine paraît plus économique quant à l'aire qu'il occupe. On se propose de poursuivre dans cette même veine et de rechercher des courbes qui collent ainsi au mouvement de l'aiguille. Une aiguille que l'on fait glisser sur le plan en un mouvement continu dessine naturellement une courbe qui suit ce mouvement. Les différentes positions de l'aiguille peuvent être vues comme autant de droites et la courbe ainsi créée s'appelle l'*enveloppe* de toutes ces droites.



On voudrait maintenant employer ce type de courbes à la construction de nouvelles figures pour le probleme de Kakeya. Jusqu'à présent on se donnait le domaine à l'intérieur duquel on essayait de retourner l'aiguille. On se donne maintenant le mouvement de l'aiguille

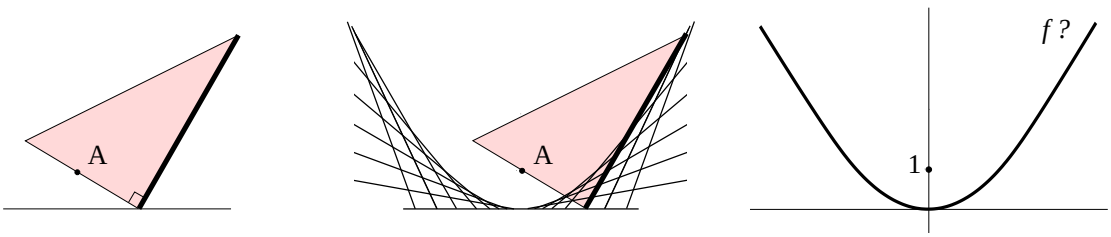
comme point de départ et on se demande quelle est la figure qui l'épouse le mieux possible. Chacune des droites, c'est-à-dire chaque position de l'aiguille, *touche* la courbe en un certain point. Cela signifie que si l'on regarde à la loupe autour de ce point, la courbe et la droite se confondent au fur et à mesure que le grossissement augmente.



Il y a donc un lien essentiel entre la courbe et les droites qui l'enveloppent :

Au point de contact, la pente de la courbe et celle de la droite sont égales.

Reste que cet énoncé contient une difficulté, il ne donne pas l'emplacement de ces points de contact. On est en présence d'une série de droites et d'une courbe, chaque droite touchant la courbe en un certain point dont on ignore tout, la seule chose que l'on sache, c'est l'égalité des pentes en ce point. Dans le contexte du problème de Kakeya, cette courbe sert à fabriquer un domaine dont il faut calculer l'aire et cela nécessite de connaître une fonction dont le graphe est ladite courbe. C'est ce passage de la condition d'égalité des pentes à l'expression de la fonction enveloppe qui va faire apparaître une équation différentielle dont la fonction inconnue f est justement la fonction enveloppe recherchée. A titre d'illustration on va montrer au moyen d'une équation différentielle qu'un certain mouvement d'équerre engendre une parabole. Le mouvement est le suivant : on fait glisser l'angle droit de l'équerre sur une droite tout en astreignant un des côtés de l'équerre à coulisser sur un point fixe A. Les positions successives de l'autre côté de l'angle droit représentent une famille de droites qui dans leur ensemble forment une courbe qui semble être une parabole. Un raisonnement simple faisant intervenir une équation différentielle va en donner la confirmation.



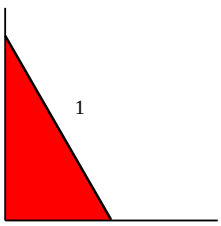
Contrairement à tous les problèmes qui se sont posés jusqu'à présent, ce n'est plus une simple valeur que l'on recherche mais bien une fonction f, celle dont la représentation graphique est justement la courbe enveloppe. Afin de déterminer cette fonction inconnue f il est nécessaire de traduire en langage mathématique l'*égalité des pentes au point de contact*. Et puisque la pente d'une courbe est donnée par la fonction dérivée f', l'égalité des pentes se réduit donc à une égalité faisant intervenir la fonction f et sa dérivée f'. Après un calcul dont le détail est donné dans l'encart de la page suivante, cette égalité des pentes aboutit à la relation :

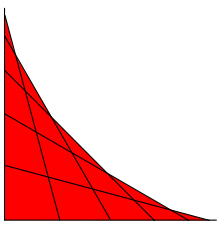
$$f = xf' - f'^2.$$

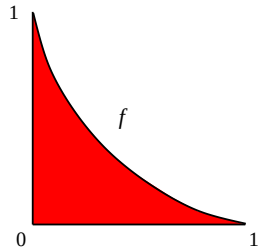
Cette égalité, où l'inconnue est la fonction f, est un exemple d'équation différentielle. La résolution de cette équation montre que la courbe qui se dessine est bien une parabole. Les calculs explicités dans l'encart de la page suivante permettent de vérifier que la fonction inconnue est précisément la parabole $0.25x^2$.

Avancée sur la question de Kakeya

Un aspect séduisant de la conjecture énoncée plus haut tient au mouvement de l'aiguille dans la deltoïde. En effet ce mouvement épouse parfaitement le contour de la figure, ce qui signifie en langage mathématique que la deltoïde est la courbe enveloppe des positions successives de l'aiguille. Cependant on peut fabriquer bien d'autres figures qui possèdent cette même propriété et il se trouve que certaines d'entre elles ont une aire plus petite que la deltoïde.



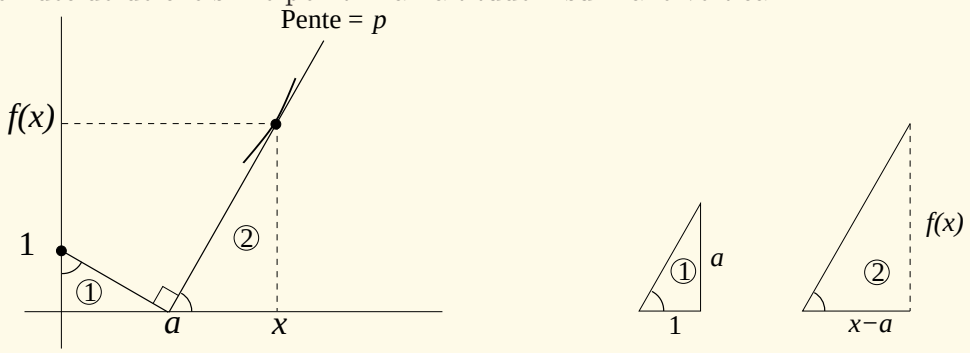




Il n'est pas nécessaire pour construire une figure meilleure que la deltoïde de faire appel à des mouvements de l'aiguille particulièrement compliqués. En fait, on peut y arriver au moyen d'un mouvement du type de celui déjà décrit pour la parabole. Précisément, on force chacune des deux extrémités de l'aiguille à se déplacer le long de deux directions fixes comme l'indique le dessin ci-dessus. Une courbe enveloppe se dessine qui semble peu familière. Elle est pourtant bien présente concrètement puisque c'est celle que décrit une porte de garage dont le haut est contraint de rouler sur une rampe horizontale et le bas sur une rampe verticale. Cette courbe est d'ailleurs bien connue des ingénieurs sous le nom d'*astroïde*. Au final le résultat du mouvement de l'aiguille sous l'astroïde est une rotation d'un quart de tour, deux figures semblables accolées permettent donc un retournement complet de l'aiguille.

Mise en équation du problème de l'équerre

Afin de traduire ce problème en termes mathématiques, on place l'équerre dans un repère et on décide de choisir le point A à l'altitude 1 sur l'axe vertical.



A une position donnée a de l'angle droit de l'équerre sur l'axe horizontal, la droite que l'on trace touche la courbe en un certain point inconnu mais qui est quand même représenté. En ce point la pente de courbe est $f'(x)$. Selon le lien établi plus haut, cette droite et la courbe ont la même pente en ce point. Si on note p la pente de la droite, ceci se traduit par :

$$f'(x) = p.$$

Les triangles 1 et 2 qui ont les mêmes angles sont semblables donc :

$$\frac{a}{1} = \frac{f(x)}{x-a}.$$

D'autre part, dans le triangle 2, la pente p de la droite est le quotient de la distance verticale par la distance horizontale, soit :

$$p = \frac{f(x)}{x-a}.$$

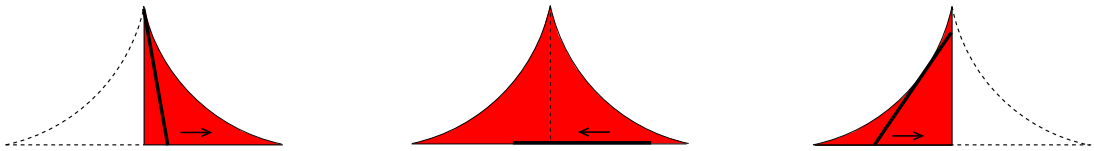
Le cumul des deux égalités précédentes permet d'écrire $p = a$, d'où

$$p = \frac{f(x)}{x-p}.$$

La toute première égalité permet ensuite de remplacer la pente p par $f'(x)$. On obtient en fin de compte, une égalité où interviennent les fonctions f et f' :

$$f(x) = xf'(x) - f'(x)^2.$$

Cette relation est inhabituelle, elle ne donne pas $f(x)$ seulement en fonction de x mais aussi en fonction de sa dérivée $f'(x)$. Autrement dit, au lieu de trouver directement l'expression $f(x)$ on trouve une égalité qui relie la fonction f et sa dérivée f'. C'est une *équation différentielle* que l'on écrit de manière condensée : $f = xf' - f'^2$.



Cette nouvelle figure est-elle plus économe que la deltoïde ? Il suffit pour le savoir de calculer son aire et de comparer. Bien sûr cette figure étant composée de deux moitiés identiques, on peut se contenter de calculer l'aire d'une seule de ces moitiés, celle de droite par exemple. Si, comme cela est indiqué dans l'avant-dernière illustration, on appelle f la fonction de la courbe enveloppe, l'aire sous cette courbe se calcule au moyen d'une simple intégrale selon la formule :

$$\text{Aire} \left(\quad \right) = \int_0^1 f$$

Comme d'habitude le calcul de l'intégrale nécessite de connaître l'expression de f. Les lignes qui suivent donnent sans entrer dans le détail des calculs, les grandes étapes qui conduisent à cette fonction f. La première d'entre elles consiste en la détermination d'une équation différentielle. Par un raisonnement géométrique similaire à celui du paragraphe précédent on obtient l'équation :

$$f = xf' - \frac{f'}{\sqrt{1+f'^2}}.$$

Cette équation peut sembler bien compliquée mais cela n'a ici aucune importance, l'essentiel est que l'on ait obtenu une relation entre la dérivée et la fonction. Pour la résolution de telles équations le mathématicien dispose de toute une batterie de techniques et l'application de ces techniques livre une expression de la fonction f :

$$f = (1 - x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}.$$

Bien entendu, comme le laissait supposer l'écriture de l'équation différentielle, cette fonction solution n'est pas tout à fait élémentaire, elle fait intervenir des racines carrées et cubiques, présentes sous la forme des puissances un demi et un tiers. Les fonctions de ce type sont néanmoins bien connues et leur étude ne pose aucun problème. En particulier il existe des tables dans lesquelles il sera possible de trouver une fonction F dont la dérivée est f et il ne restera plus alors qu'à appliquer la célèbre formule d'intégration pour obtenir l'aire recherchée. Grâce au calcul différentiel ce passage, d'un mouvement de l'aiguille à la valeur de l'aire se résume à une procédure qui ne repose plus en fin de compte que sur un certain savoir-faire technique. Tous calculs faits on trouve :

$$\text{Aire} \left(\quad \right) = \int_0^1 f = F(1) - F(0) = 0.29452...$$

Résolution du problème de l'équerre

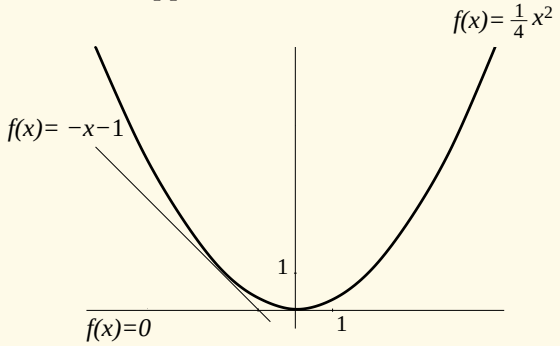
Il s'agit de résoudre l'équation différentielle $f = xf' - f'^2$. A la différence des équations ordinaires rencontrées jusqu'à présent, l'inconnue est ici une fonction. La résolution d'une telle équation a donc pour but de trouver l'expression de cette fonction inconnue et cette résolution fait appel à toute une série de procédés qui dépassent le cadre de cet ouvrage. On se contentera par conséquent de vérifier que la fonction $f(x) = \frac{1}{4}x^2$ est une solution de l'équation différentielle. La première étape est de déterminer l'expression $f'(x)$ de la dérivée de f.

$$f(x) = \frac{1}{4}x^2 \quad \text{on dérive} \longrightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{2}x.$$

La seconde étape est de remplacer f et f' dans l'équation différentielle de départ par les expressions $\frac{1}{4}x^2$ et $\frac{1}{2}x$:

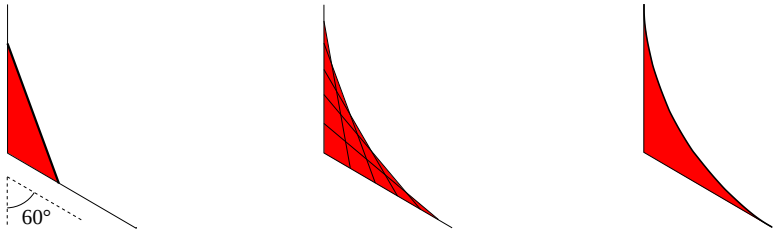
$$\begin{array}{rccccc} & f(x) & = & xf'(x) & - & f'(x)^2 \\ \text{on remplace} & \downarrow & & \downarrow & & \\ & \frac{1}{4}x^2 & & \frac{1}{2}x^2 & - & (\frac{1}{2}x)^2. \end{array}$$

Après simplification on constate que l'expression de gauche et celle de droite sont identiques. La fonction $f(x) = \frac{1}{4}x^2$ est donc une solution de l'équation différentielle. Visuellement on observe que la courbe enveloppe a bien la forme d'une parabole, la fonction $\frac{1}{4}x^2$ semble être la bonne. Tout se complique cependant lorsque l'on constate qu'il y a une multitude d'autres fonctions qui répondent à cette équation, par exemple $f(x) = 0$, $f(x) = x - 1$, $f(x) = 2x - 4$, $f(x) = -x - 1$ comme on peut facilement le vérifier. Cette équation fourmille de solutions. Si l'on représente ces dernières solutions on s'aperçoit qu'il s'agit de droites de l'enveloppe.

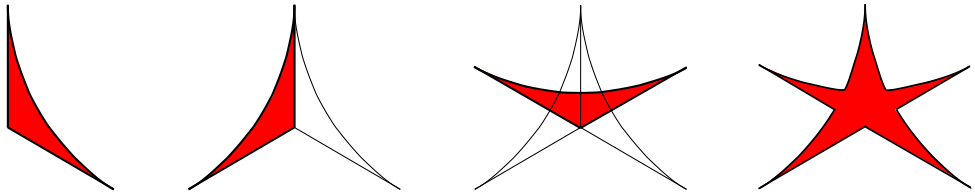


En réalité toutes les droites de l'enveloppe sont aussi solutions. Résoudre le problème de l'équerre, c'est-à-dire trouver la courbe enveloppe d'une série de droites, c'est aussi choisir la bonne fonction parmi toutes celles qui satisfont à une certaine équation différentielle. Ici, cette bonne fonction est la parabole $\frac{1}{4}x^2$.

Après multiplication par deux, on trouve une aire totale égale à 0.58904..., ce qui est très supérieur à l'aire de la deltoïde. Ce résultat peut sembler décevant puisqu'il ne parvient même pas au niveau du triangle équilateral qui occupe une aire égale à $\frac{1}{\sqrt{3}} = 0.57735....$ Pourtant, il est possible de l'améliorer de façon déterminante tout en gardant ce même type de courbes. Mais pour cela il faut être plus astucieux et reprendre la construction non plus en juxtaposant simplement deux morceaux, mais en en réunissant un plus grand nombre de sorte que ceux-ci se chevauchent le plus possible. Par exemple on peut commencer par assembler trois éléments qui permettent chacun à l'aiguille d'effectuer un sixième de tour. La construction et la composition de ces éléments est tout à fait semblable à ce qui a été présenté plus haut, elle est résumée dans l'illustration qui suit :



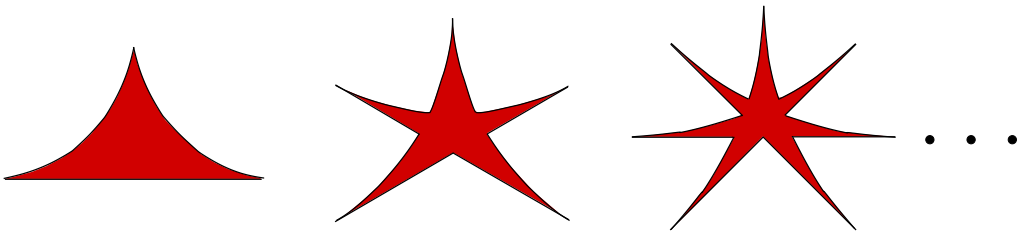
L'aiguille, depuis la verticale jusqu'à la position oblique tout en bas, effectue en tout une rotation de 60° au cours de son trajet, soit un sixième de tour. Un assemblage de trois éléments de cette sorte permet bien à l'aiguille d'effectuer un demi-tour.



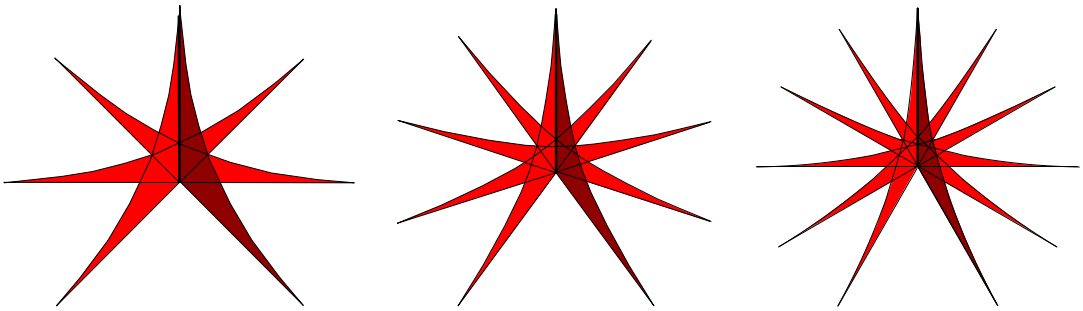
Contrairement à l'assemblage précédent, qui était une juxtaposition de deux éléments, il y a ici empiètement des éléments l'un sur l'autre. L'aire du total n'est donc pas le triple de l'aire de chaque élément, elle est moindre et c'est là l'intérêt d'un tel assemblage. Un calcul de l'aire donne :

Aire ( ) = 0.44843...

Cette figure est nettement plus économe que la précédente, bien que ce resultat ne soit pas tout à fait satisfaisant puisque il est encore supérieur à l'aire de la deltoïde c'est-à-dire 0.39269... Il se trouve toutefois que les deux figures qui viennent d'être construites ne sont pas isolées, elles découlent d'un même procèdé de construction et peuvent donc engendrer en réitérant ce procédé toute une famille infinie de formes étoilées.



Si on examine de plus près ces étoiles, on constate que l'aiguille (représentée en noir dans l'illustration de la page suivante) conserve la possibilité de se retourner, en effectuant des angles de plus en plus faibles répétés de plus en plus de fois.



Les étoiles ainsi construites possèdent un nombre croissant de branches qui sont elles-même de plus en plus fines. On assiste donc à un phénomène de compétition entre le nombre de branches qui ne cesse de grandir et l'aire de chacune d'elles qui ne fait que décroître. Au bilan ce procédé de construction, bien que systématique, ne garantit pas que les figures produites aillent en s'amenuisant. Ce n'est d'ailleurs pas le cas, un calcul précis montre que l'aire est en diminution jusqu'à une figure ayant 25 branches avant d'augmenter de nouveau mais très lentement. Il n'est cependant pas besoin d'aller aussi loin que cette étoile à 25 branches pour découvrir des figures plus petites que la deltoïde, celle représentée ci-dessus à droite convient. Un calcul direct montre en effet que cette étoile à 11 branches avec une aire de 0.39140... supplante la deltoïde. Ainsi, le candidat naturel pour répondre à la question de Kakeya, n'est pas le bon. La conjecture proposée tacitement par Kakeya s'avère donc fausse : le mystère s'épaissit.

Billards

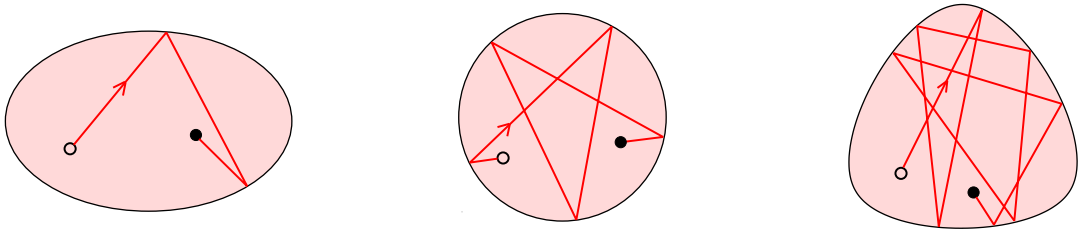
Les équations différentielles permettent de connaître précisément les contours d'une figure lors d'un mouvement complexe de l'aiguille, la connaissance de ces contours étant un préalable indispensable au calcul rigoureux de l'aire de la figure. Mais leur rôle ne s'arrête pas là, elles interviennent partout où l'on cherche à quantifier un mouvement et ce, quelle qu'en soit la nature : trajectoire d'une fusée, croissance des populations, répartition des courants marins, conduction de la chaleur, etc. En fait, elles interviennent dans toutes les situations qui connaissent une évolution au cours du temps et que l'on appelle, par

opposition aux systèmes statiques, des *systèmes dynamiques*. Parmi tous les systèmes dynamiques que l'on peut imaginer, il en est un qui a joué, plus que tout autre, un rôle prépondérant dans l'histoire des mathématiques, il s'agit du système solaire. Celui-ci occupe en effet une place fondamentale dans la vie sur Terre puisqu'il est la cause première de l'alternance des jours et des nuits, de l'existence des saisons et des rythmes annuels. Le désir constant des hommes de percer le mystère de cette mécanique céleste a conduit au cours des temps à un véritable foisonnement d'idées. La plus belle d'entre elles est due à l'intuition extraordinaire de Newton lorsqu'il comprit que le système solaire est en réalité régi par une équation différentielle, la très fameuse *loi fondamentale de la dynamique*. Cette découverte qui fut largement célébrée en son temps est à l'origine de l'idéal déterministe prôné par Laplace : il s'avère en effet que si l'on sait résoudre cette équation différentielle et si l'on connaît la position et la vitesse de toutes les planètes à un moment donné alors il est théoriquement possible d'en déduire leurs mouvements précis aussi bien dans les temps futurs que dans le passé. Et la prédiction à partir d'une seule et unique loi de grands événements astronomiques comme les éclipses ou le passage des comètes, a profondément marqué les contemporains de Newton.

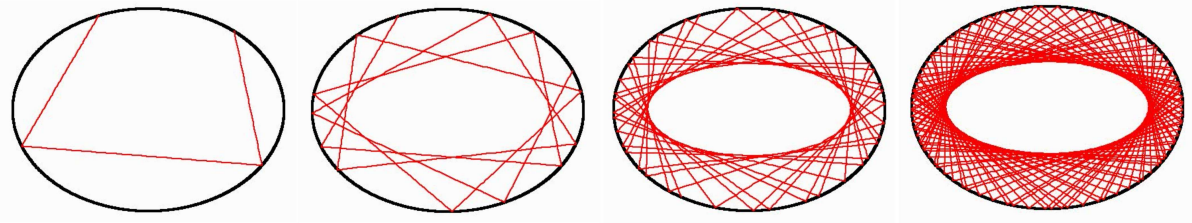
Ces prédictions par le calcul, toutes extraordinaires qu'elles fussent, concernaient en réalité des événements relativement proches dans le temps. Elles résultaient en effet de la fameuse équation de Newton mais moyennant certaines approximations, en particulier en faisant abstraction des corps peu influents quant à l'événement que l'on étudiait. Dès lors que l'on a commencé à réfléchir à l'évolution du système solaire sur des temps longs, où des influences même très modestes peuvent à la longue avoir de réels effets, on s'est alors heurté à des difficultés si considérables que toute prédiction devenait impossible. Un exemple éloquent de cette difficulté est le problème de la stabilité du système solaire : l'observation de la course des planètes autour du soleil révèle un système régulier composé de planètes qui semblent réitérer indéfiniment la même trajectoire. Mais cette impression pourrait bien être trompeuse ; certes les planètes tournent autour du soleil selon une ellipse, mais ceci n'est en réalité qu'approximatif puisque toutes les planètes exercent entre elles une influence mutuelle qui déforme leur trajet. Il se pourrait que dans le futur ces trajectoires se modifient sensiblement jusqu'à ce que certaines planètes échappent à l'attraction du soleil ou encore qu'une collision se produise. En d'autres termes les toutes petites pertubations infligées aux ellipses peuvent-elles, à la longue, menacer l'équilibre du système solaire lui-même ? A la fin du XIX$^{\text{ème}}$ siècle, et après que de nombreux mathématiciens et astronomes eurent étudié la question, Poincaré mit en évidence un phénomène qui allait changer radicalement le point de vue des scientifiques sur ces questions : la nature chaotique de certaines trajectoires de la mécanique celeste. Cette apparition du chaos dans la résolution des équations différentielles est un obstacle majeur aux prédictions à moyen terme. On n'a par exemple aucune idée de la position de la planète Terre à un horizon de cent millions d'années, ce qui est peu comparativement aux 5.6 millards d'années d'existence du système solaire.

On pourrait penser que cette apparition du chaos résulte de l'extrême complexité du

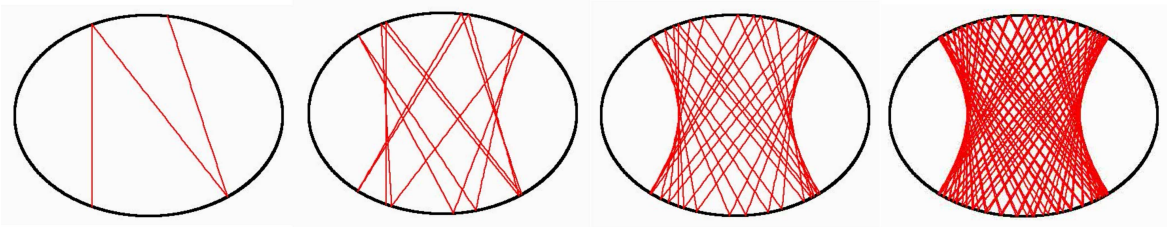
système solaire due à la présence de nombreux corps qui interagissent entre eux, mais en réalité il n'en est rien et c'est là une des grandes révélations de l'étude des équations différentielles : le chaos peut surgir dans des systèmes infiniment plus simples. Il est même possible d'observer ces phénomènes sur des systèmes tellement épurés que les équations différentielles semblent avoir disparu. Un exemple saisissant d'un tel système est ce que les mathématiciens appellent un *billard*, c'est-à-dire un système composé d'un seul corps dont la trajectoire est astreinte à demeurer à l'intérieur d'un espace bien délimité. Le corps en question évolue en ligne droite jusqu'à atteindre la limite du domaine où il rebondit alors selon la loi de la réflexion de Descartes, c'est-à-dire comme un rayon lumineux frappant une surface réfléchissante.



En général, les trajectoires apparaissent de plus en plus enchevêtrées au fur et à mesure des rebonds, néanmoins dans certains cas, si on laisse la trajectoire se développer á l'infini, une régularité inattendue peut alors se révéler. C'est ce qui a lieu en particulier dans un billard qui serait une ellipse parfaite ; une régularité apparaît et et se fait de plus en plus présente au fur et à mesure des rebonds de la boule.



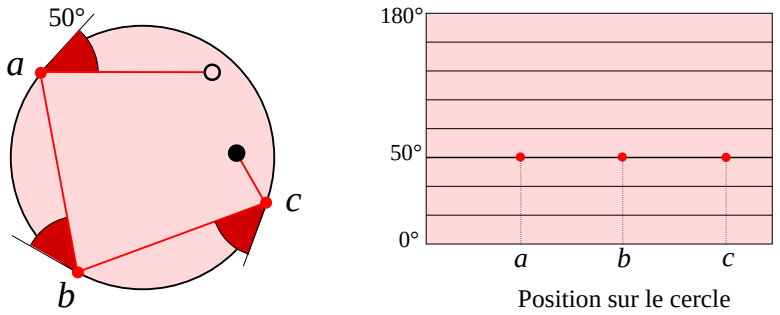
De manière surprenante il semble qu'une barrière invisible interdise à la boule de s'aventurer à l'intérieur du billard, cette barrière invisible n'est autre que la courbe enveloppe de la trajectoire. Elle devient de plus en plus évidente avec le nombre des rebonds et revêt ici la forme d'une ellipse. Cette courbe enveloppe, qui partage ainsi l'intérieur du billard, est ce que les mathématicien appellent une *caustique*, elle signe invariablement la présence de régularité dans le système étudié. Ici cette régularité provient de la forme géométrique de l'enceinte du billard qui est une ellipse parfaite. Une telle « ellipse »possède en effet nombre de propriétés exceptionnelles qui forcent les trajectoires à rester confinées dans des zones bien précises du billard. Toutefois ces zones ne sont pas nécessairement des corridors elliptiques, elles peuvent aussi prendre une autre forme comme le montre l'illustration suivante.



Dans ce cas le domaine dans lequel la boule est prisonnière est délimité par deux courbes, les deux branches d'une hyperbole et, là encore, ce sont les propriétés remarquables de l'ellipse qui sont à l'origine de ce phénomène. Comment s'opère la transition entre ces deux types de trajectoires ? Dans les deux séries d'illustrations ci-dessus le point de départ de la trajectoire est identique, il se trouve tout en haut de l'ellipse, en revanche l'angle d'attaque est différent, il est rasant dans le premier cas et beaucoup plus franc dans le second. En fait, à mesure que l'angle augmente la courbe enveloppe s'applatit jusqu'à n'être qu'un segment de droite. Passé ce cap une rupture se produit et la courbe enveloppe passe à l'hyperbole.

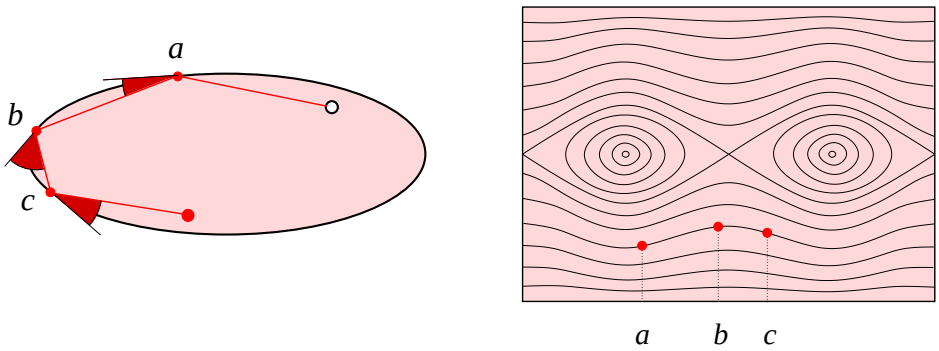
Une bonne façon d'appréhender la situation dans son ensemble est de réaliser ce que les savants appellent *un portrait de phase*. Ce portrait de phase donne une image du comportement global du système : plutôt que de représenter une à une les trajectoires comme cela a été fait ci-dessus, on peut moyennant un petit effort d'abstraction réaliser un diagramme symbolique qui les englobe toutes. L'intérêt de cette représentation est qu'elle permet de répondre d'un seul coup d'oeil à de nombreuses questions concernant le système dans son ensemble. Par exemple : que se passe-t-il quand on change de point de départ ? Quel est l'angle qui provoque la rupture ? Il permet également de mettre en évidence une éventuelle régularité de ce système ou au contraire la présence de chaos en son sein.

Comment se réalise un tel portrait de phase ? Pour le comprendre, il est préférable dans un premier temps de se placer dans une situation plus simple que celle du billard elliptique, en susbstituant à l'ellipse l'enceinte la plus symétrique qui soit : le cercle. La spécificité d'un tel billard circulaire est qu'une fois la boule lancée, l'angle à chaque rebond reste inchangé, il se perpétue indéfiniment. Dans la figure ci-dessous, il est toujours égal à 50°.



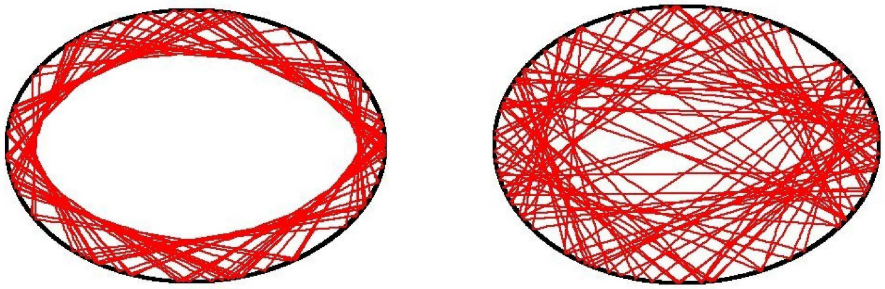
La trajectoire d'une boule dans un billard n'est autre qu'une succession de rebonds et chacun de ces rebonds peut être décrit mathématiquement par sa position sur le cercle et l'angle sous lequel il le frappe, Pour représenter ceci mathématiquement, on ≪ déroule ≫ le cercle en une ligne horizontale, et au dessus de chaque endroit où la boule a rebondi, on place un point à une hauteur qui correspond à l'angle de ce rebond. Dans l'illustration ci-dessus, cet angle Ã©tant toujours égal à 50°, tous les points vont se trouver à la même hauteur. Plus généralement puisque l'angle de rebond est conservé, chaque trajectoire va apparaître comme une succession de points répartis sur la même horizontale. C'est la raison pour laquelle le portrait de phase est symbolisé par une série de lignes horizontales. Cette représentation met en évidence la régularité des trajectoires, conséquente à la parfaite symétrie de ce billard. Un tel diagramme, dans lequel la trajectoire d'une boule est réduite à une succession de points, chacun de ces points donnant la position et l'angle d'un rebond, est un portrait de phase, dans le cas présent c'est celui du billard circulaire. Bien entendu cette représentation est moins naturelle que le dessin naïf des trajectoires mais elle offre l'avantage d'en révéler les propriétés cachées.

Quel serait maintenant le portrait de phase du billard elliptique ? Contrairement au cas du cercle, l'angle de rebond varie au cours du mouvement et la série de points qui symbolise la trajectoire dans le portrait de phase ne sera plus disposée sur une horizontale. Une étude approfondie montre néanmoins que ces trajectoires demeurent sur des courbes d'une grande régularité, quelques unes d'entre elles sont représentés dans le diagramme ci-dessous. On retrouve en particulier un phénomène déjà observé plus haut : les trajectoires se divisent en deux types, celles qui sont confinées sur le bord du billard et qui correspondent aux courbes ondulées en haut et en bas du diagramme, et celles qui forment un faisceau vertical au centre du billard et qui correspondent aux courbes de forme ovoïdale. Ces dernières sont associées entre elles deux par deux de la façon la plus évidente qui soit : à une courbe située à gauche dans le diagramme correspond son symétrique situé à droite. La trajectoire de la boule ira visiter alternativement les deux courbes selon qu'elle rebondira en haut ou en bas dans l'enceinte elliptique. La courbe en forme de huit renversé qui se trouve entre les deux matérialise la frontière qui sépare les deux types de mouvements.



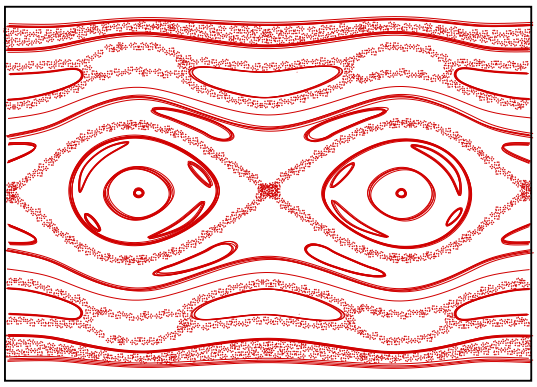
Ce diagramme est certes moins élémentaire que celui du billard circulaire, mais il est

tout de même empreint d'une grande régularité qui signe la présence d'un ordre global dans le système du billard elliptique. Ce système n'est donc en rien chaotique mais le chaos n'est pas très loin. Il suffit pour s'en rendre compte de déformer très légèrement l'ellipse qui forme le contour du billard et de s'intéresser à nouveau aux comportements des trajectoires. On observe alors que certaines trajectoires s'avèrent relativement peu sensibles à cette perturbation (dessin de gauche) alors que d'autres en sont gravement affectées (dessin de droite).



Dans ces dessins la perturbation qui a été appliquée à l'ellipse est presque imperceptible, le contour de l'enceinte est légèrement plus pointu qu'une ellipse véritable. Pourtant certaines trajectoires s'en trouvent complètement bouleversées, une toute petite modification a suffi à briser l'extrême régularité que l'on observait dans le comportement du billard elliptique et on se trouve, pour la première fois, en présence d'un phénomène qui semble chaotique. Ceci contredit une intuition naturelle selon laquelle une petite modification de la cause induit une petite modification de l'effet. Dans la vie concrète, si on réalise une table de billard en forme d'ellipse, cette dernière ne pourra pas être, par la force des choses, une ellipse parfaite et ce seront les trajectoires perturbées représentées ci-dessus auxquelles on aura affaire. De façon plus générale, toute idéalisation de la réalité à l'aide de formes mathématiques pures mérite d'être considérée avec une grande prudence.

Comment, en dépit de ces phénomènes déroutants, avancer dans la compréhension des trajectoires ? Une démarche fructueuse consiste à les considérer dans leur ensemble plutôt que d'essayer de les appréhender les unes après les autres. Pour le dire d'une manière imagée, on aimerait dresser un panorama général de la situation en espérant que celui-ci se révélera éclairant et qu'il puisse dévoiler d'éventuelles structures de l'ensemble. C'est précisément ce que permet de faire le portrait de phase, il nécessite néanmoins de représenter un grand nombre de trajectoires ce qui, à la main, se révèle très fastidieux. Il est donc indispensable de procéder à une simulation informatique et c'est elle qui est à l'origine de la figure représentée ci-dessous.



Le portrait obtenu garde *grosso modo* la structure de celui du billard elliptique parfait et rend compte des phénomènes observés précédemment, par exemple la relative conservation de certaines trajectoires. Ainsi les lignes ondulées correspondent à des trajectoires qui ont été préservées, à l'image de celle représentée à gauche dans l'illustration qui précède ce diagramme. En revanche d'autres trajectoires ne suivent plus des lignes régulières mais errent anarchiquement dans des certaines zones brouillées du diagramme. Par exemple la trajectoire «c̃haotique »représentée plus haut, correspond dans le portrait de phase à la zone de flou qui entoure les deux courbes ovoïdales. Cette simple observation révèle un fait inattendu : alors que dans le billard la trajectoire parcourait chaotiquement la totalité de l'enceinte, elle reste, dans le portrait de phase, confinée dans une zone certes brouillée mais délimitée, et relativement proche de la courbe en forme de huit qu'elle aurait suivie dans un billard non perturbé. Le désordre causé par la perturbation n'est donc pas total, le portrait de phase permet d'en circonscrire le contour et d'en visualiser l'ampleur.

Il faut cependant rester prudent dans l'interprétation de ce portrait de phase ; il résulte en effet de calculs numériques effectués par une machine. Finalement, la figure que l'on obtient peut être entachée d'erreurs dues aux arrondis successifs dans les calculs. Elle pourrait également se révéler trop incomplète pour refléter la réalité des choses, puisque, bien sûr, seul un nombre *fini* de trajectoires peut être représenté. En fait, la compréhension du portrait de phase des billards est loin d'être achevée et il se pourrait que nos intuitions et nos interprétations à son sujet s'avèrent inexactes. Il est cependant un phénomène important que l'on rencontre dans les systèmes chaotiques et qui, lui, est fermement établi : c'est celui de la sensibilité aux conditions initiales. Les deux dessins ci-dessous mettent justement en évidence cette sensibilité : à gauche on a représenté un billard elliptique parfait et à droite un billard elliptique déformé. Dans chacun d'eux, on fait partir d'un même point (représenté par un petit disque blanc) deux boules avec deux angles d'attaque presque identiques. A l'issue de quelques rebonds, ces deux boules sont encore très proches dans le billard parfait alors qu'elles se mettent à diverger dans le billard perturbé.

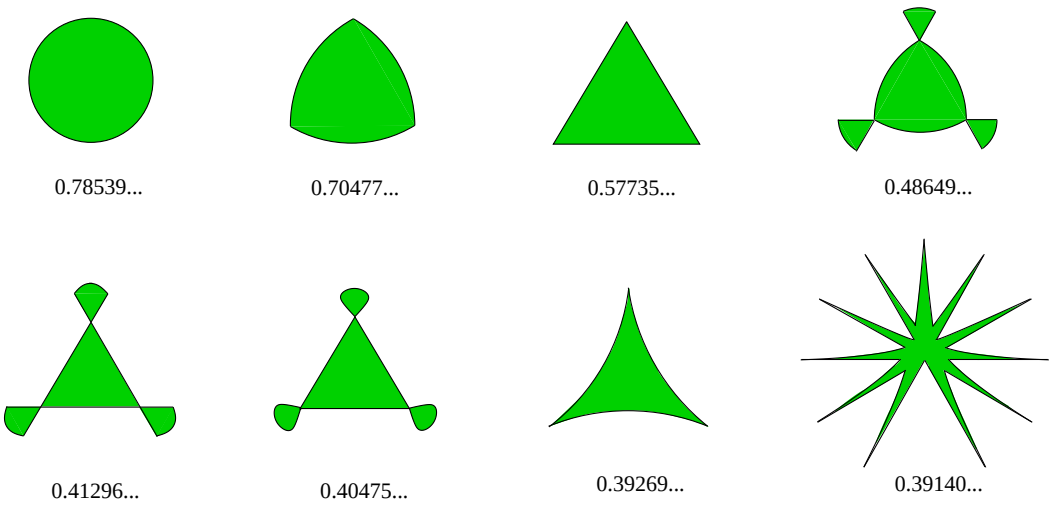
Ainsi une petite pertubation des conditions initiales, ici l'angle d'attaque, entraîne dans un délai très bref une grande divergence des trajectoires. Autrement dit, si on a une toute petite incertitude sur l'angle de départ, il est impossible de prévoir, même grossièrement, la position de la bille après quelques rebonds. Cette simple observation a de grandes conséquences dans la pratique puisque toutes les données dont on dispose concrètement ont forcément une certaine marge d'erreur. Loin d'être un phénomène anodin, la sensibilité aux conditions initiales est en fait un obstacle à la prévision puisque très rapidement la marge d'erreur va couvrir tous les événements possibles : on est alors condamné à des prédictions à court terme. Cette sensibilité aux conditions initiales existe non seulement dans des situations trés simplifiées comme celle du billard mais aussi dans des situations plus complexes, par exemple dans certaines réactions chimiques ou dans la dynamique de certaines populations. Néanmoins, si cette sensibilité aux conditions initiales est bien présente jusque dans les grands systèmes physiques que sont la météorologie ou la course des planètes autour du soleil, son impact sur la prédiction fait toujours l'objet de débats entre les scientifiques. Il se pourrait que les quantités globales, celles auxquelles on s'intéresse concrètement, comme la vitesse du vent ou la pression, soient moins sensibles qu'on pourrait le penser aux perturbations et que l'espoir d'une prédiction à plus long terme ne soit pas totalement perdu. A l'heure actuelle cette prédiction n'est que de quelques jours pour la météorologie et de 100 millions d'années pour la position de la planète Terre.

Le théorème de Besicovitch

Un nouveau sujet mathématique a fait son apparition récemment : les mathématiques des origamis. La pratique des origamis est, dans la tradition japonaise, l'art du pliage (Oru) d'une feuille de papier (Kami). Très populaire en Extrême Orient, il s'est propagé au fil des siècles dans le monde entier. Il rencontre aujourd'hui de nouveaux adeptes car on s'est rendu compte que les questions de pliages entrent en jeu dans de nombreux problèmes concrets. Par exemple, elles interviennent dans la réalisation d'engins spatiaux propulsés par voile solaire. Le principe de ce mode de propulsion est, à la manière d'un bateau à voile, d'utiliser le flux de photons émis en permance par le soleil pour pousser le vaisseau. Ce mode de propulsion a pour avantage de ne nécessiter aucune source d'énergie embarquée mais produit en contrepartie une poussée très faible. Une voile susceptible de mouvoir un appareil spatial doit donc être de très grande dimension. Tout le problème est alors de plier cette voile de façon optimale pour assurer à la fois son logement dans la coiffe de la fusée et son bon déploiement dans l'espace. C'est donc en définitive un problème d'origami auquel sont confrontés les ingénieurs. D'ailleurs les meilleurs pliages que l'on connaisse jusqu'à présent ont été trouvés de façon expérimentale par tâtonnement à partir de pliages célèbres découverts par des maîtres-origamis ; ils reposent donc sur des bases empiriques. Par conséquent rien ne garantit qu'ils soient optimaux même si ils attestent d'une efficacité certaine dans la pratique. C'est là qu'intervient la nécessité de transformer ce problème d'origami en une question purement mathématique car seule une

démonstration peut garantir qu'un pliage est bien le meilleur possible. En effet, chaque solution empirique est à la merci d'une autre solution plus astucieuse, d'où la nécessité d'un raisonnement général qui embrasse toutes les possibilités et permette de clore le problème de façon définitive. C'est pourquoi les mathématiciens des origamis recherchent un pliage validé par une démonstration qui serait alors, sans contestation possible, le plus approprié au logement de la voile dans la fusée.

Bien que le contexte du problème de Kakeya soit différent de celui des origamis, la démarche adoptée pour le résoudre est néanmoins très similaire à celle que les concepteurs de voiles solaires ont suivie : une approche empirique à partir de formes géométriques déjà connues. Comme dans le cas des pliages, cette façon de procéder a l'avantage de conduire rapidement à la découverte de figures de plus en plus petites, mais elle ne lève jamais l'incertitude quant à la solution du problème global. A chaque nouvelle figure se pose la même question : a-t-on enfin trouvé le contour optimal, c'est-à-dire celui dont l'aire est la plus petite et à l'intérieur duquel l'aiguille puisse être retournée ? En fait jusqu'à présent la réponse a toujours été négative, chaque figure nouvelle a toujours fini par être supplantée par une construction plus astucieuse. Même la deltoïde, qui avait pourtant toutes les faveurs de Kakeya, n'y a pas résisté. On semble donc engagé dans une course dont on ne voit pas l'issue.



L'illustration ci-dessus donne en résumé les grandes étapes de cette course : une succession de figures dont les aires sont de plus en plus petites. Au fur et à mesure de la progression il est de plus en plus difficile de gagner de la place : chaque décimale gagnée coûte. L'observation de l'ensemble de ces figures semble montrer que l'on arrive à un palier qui laisse penser que l'aire minimale se situe aux alentours de 0.38 ou 0.39. Mais ceci n'est qu'une vague intuition issue de la considération de quelques figures et, de même que pour les origamis, seule une démonstration permettrait de valider définitivement cette intuition. Tant qu'il n'est pas étayé par une démonstration, le résultat pressenti peut s'avérer complètement

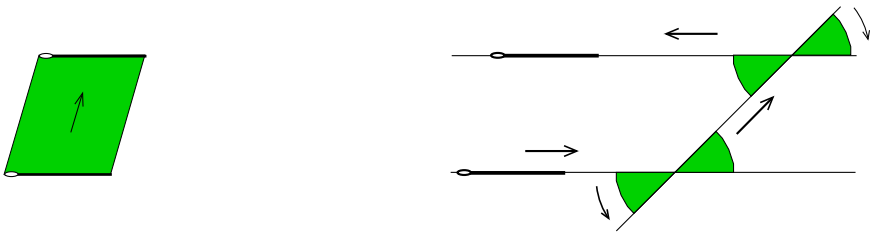
faux... et c'est d'ailleurs ce qui ce arrive ici ! En 1928, soit onze ans après que Kakeya eut posé son problème, un mathématicien russe nommé Abram Besicovitch (portrait en tête de chapitre) obtenait un résultat totalement déconcertant :

Théorème de Besicovitch. – *Il est possible de retourner une aiguille dans une aire aussi petite que l'on veut !*

Ce résultat va au delà de tout ce que l'on pouvait espérer pour ce qui est de l'amenuisement de la figure, à tel point qu'il en devient difficile à croire. Que dit-il au juste ? Il signifie que si l'on se donne une aire, même toute petite –par exemple égale à 0.1– alors il existe une figure dans laquelle l'aiguille peut se retourner et dont l'aire vaut 0.1 ; de même pour 0.01, pour 0.001, etc. Au bilan, l'aire envisagée, si minuscule soit-elle, est celle d'une figure où le retournement a lieu.

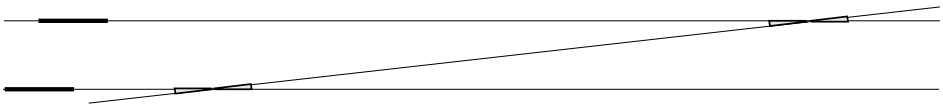
Le problème de Kakeya pour les aiguilles parallèles

Il est complètement paradoxal qu'il soit possible de déplacer une aiguille dans une aire *aussi petite que l'on veut.* Pour mieux comprendre ce phénomène déroutant, on va le mettre en évidence dans une variante bien plus élémentaire du problème de Kakeya : celle des aiguille parallèles. On prend cette fois comme situation de départ deux aiguilles placées parallèlement et on se demande simplement comment passer de l'une à l'autre en couvrant le moins d'espace possible. La première solution qui vient à l'esprit prend la forme d'un parallélogramme, il s'agit d'un simple glissement de l'aiguille que l'on maintient bien parallèle tout au long du mouvement. Ce déplacement est représenté à gauche dans l'illustration ci-dessous. Dans le cas très particulier où les positions de départ et d'arrivée de l'aiguille se situent sur une même ligne, le déplacement de l'aiguille le long de cette ligne suffit à relier ces deux positions. L'aiguille considérée étant idéale, c'est-à-dire sans épaisseur, celle-ci parcourt par conséquent un segment de droite et l'aire balayée est alors nulle. On ne peut bien sûr pas faire mieux, cette solution est donc optimale. En revanche, dans le cas général où les positions ne sont pas sur une même ligne, la solution du parallélogramme n'est pas la meilleure, il est en effet possible de déplacer l'aiguille de façon très économe en combinant judicieusement deux rotations.



Le mouvement commence par un déplacement horizontal de l'aiguille, il est suivi d'une petite rotation qui place l'aiguille sur une ligne oblique, puis d'une seconde qui la conduit

à la hauteur voulue. L'aire nécessaire à ce mouvement est figurée en gris sur l'illustration, elle est visiblement inférieure à celle que donnerait la solution du parallélogramme, mais l'intérêt majeur de cette nouvelle manière de déplacer l'aiguille n'est pas là. Ce mouvement possède en effet l'étonnante propriété de pouvoir s'allonger à l'infini en permettant un amenuisement sans limite de l'aire qu'il occupe. Il est ainsi possible de déplacer l'aiguille d'une position à une autre qui lui est parallèle dans une aire aussi petite que l'on veut.



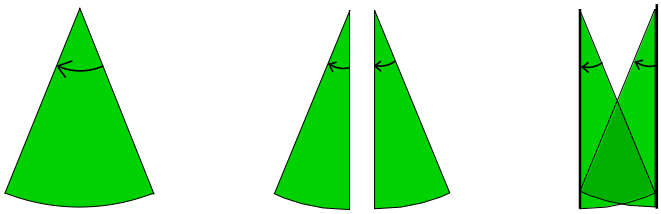
La situation est très similaire à celle du théorème de Besicovitch : n'importe quelle quantité, même toute petite, correspond à l'aire d'une figure qui permet la translation de l'aiguille. Par conséquent, le problème de Kakeya pour les aiguilles parallèles n'a pas de solution, il n'existe pas de figure meilleure que toutes les autres. On se trouve confronté à la notion d'*existence d'une solution* ; en réalité lorsqu'on cherche à résoudre un problème, il y a deux questions qui se posent :

– Existe-t-il une (ou plusieurs) solution(s) ?
– Si oui, quelle est-elle (ou quelles sont-elles) ?

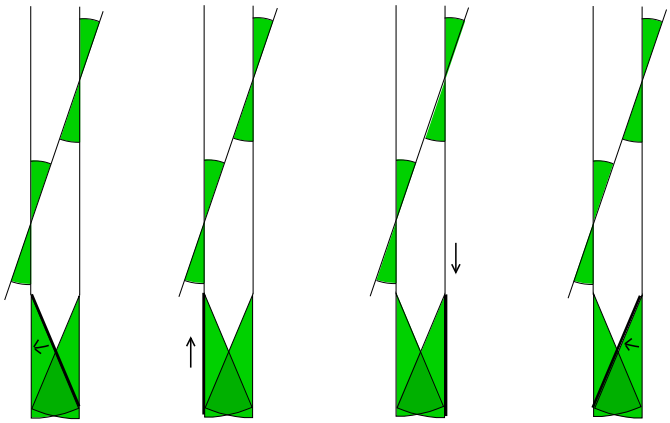
En général, on a tendance à oublier la première question et à s'attaquer directement à la seconde. C'est exactement ce qui s'est passé dans ce livre, jusqu'à présent nous avons cherché une solution sans jamais douter de son existence. Pourtant rien n'était là pour garantir cette existence... Le théorème de Besicovitch vient nous ramener à la réalité : le problème de Kakeya n'a pas de solution puisqu'il *n'existe pas* de figure plus petite que toutes les autres dans laquelle l'aiguille puisse se retourner.

La construction de Besicovitch

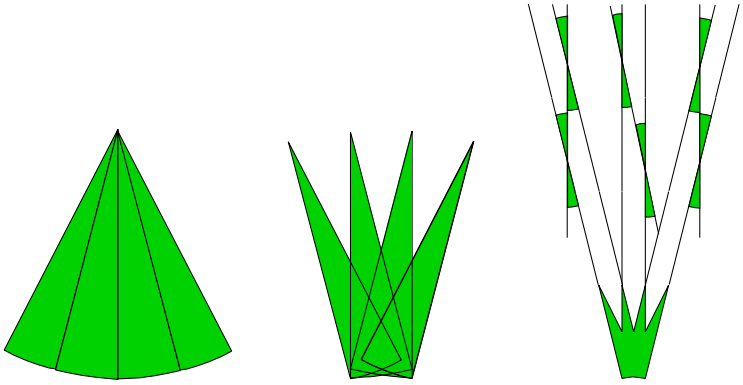
Comment diable Besicovitch s'y est-il pris pour découvrir des figures dont la petitesse est sans limite mais qui permettent toutes le retournement de l'aiguille ? L'idée est de partir d'une figure simple, de la découper en morceaux puis de faire se chevaucher les morceaux de manière à réduire son aire ; tout le problème étant d'obtenir une figure où la rotation de l'aiguille reste possible. Afin de faciliter la construction, on commence par examiner le problème de Kakeya non plus pour le demi-tour complet de l'aiguille, mais pour une rotation plus modeste, un huitième de tour par exemple. Il suffira *in fine* d'accoller quatre exemplaires de la figure ainsi créée pour que le retournement complet de l'aiguille soit possible. La surface balayée par l'aiguille lorsqu'elle effectue un huitième de tour en pivotant sur l'une de ses extrémités est le secteur angulaire de 45 degrés dont l'aiguille est le rayon, il est représenté ci-dessous à gauche.



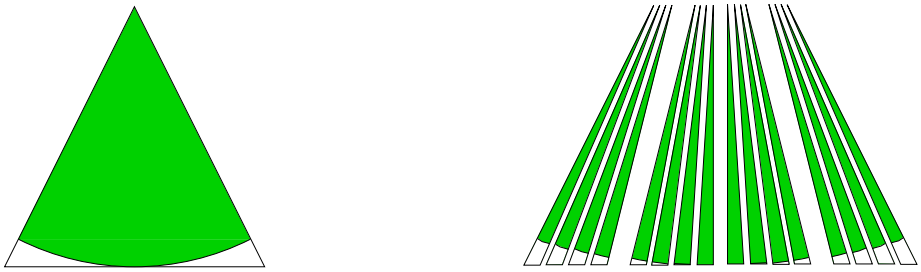
Bien sûr si on coupe ce secteur en deux et que l'on superpose les deux moitiés, on aboutit a une figure dont l'aire est nettement plus petite mais qui ne permet plus de tourner l'aiguille de 45 degrés. En effet pour effectuer son huitième de tour, l'aiguille devrait sauter de la position verticale la plus à gauche à celle la plus à droite. Telle qu'elle est représentée ici cette figure ne convient pas, il faut donc la compléter pour rendre possible le transfert d'une position verticale à l'autre. Or, deux verticales étant nécessairement parallèles, ce problème de déplacement de l'aiguille entre ces deux positions n'est autre qu'un problème de Kakeya pour les aiguilles parallèles. Il existe donc une figure permettant ce tranfert et qui occupe de surcroît une aire aussi petite qu'on le souhaite. Il suffit de la placer correctement sur les deux secteurs angulaires pour rendre au huitième de tour sa continuité.



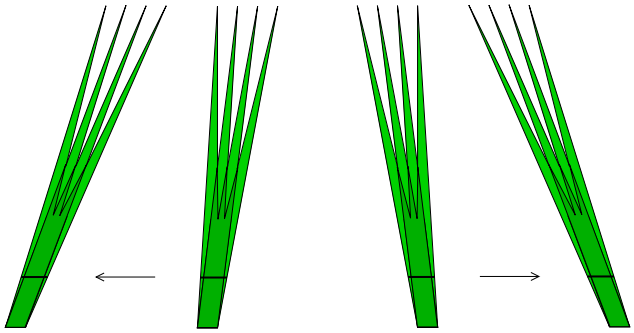
Dans les illustrations ci-dessus, le gain de place entre le secteur angulaire de 45 degrés et la construction proposée n'apparaît pas clairement, il faut cependant imaginer une partie supérieure extrêmement étirée de sorte que l'aire des parties grisées soit infime. Ce procédé de construction peut être élargi à un découpage du secteur angulaire en un nombre arbitraire de pi èces, chaque augmentation du nombre de ces pièces conduisant à un amenuisement de l'aire. L'illustration ci-dessous résume cette construction dans le cas du découpage en quatre pièces du secteur initial.



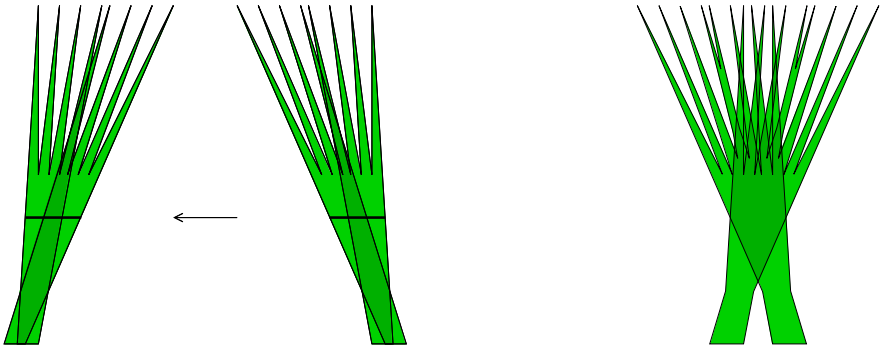
La simple multiplication du nombre de pièces n'offre malheureusement pas une réduction sans limite de l'aire finale, une étude précise de cette construction montre qu'il existe un nombre en deçà duquel l'aire de la figure ne descendra jamais, si nombreuses que soient les pièces de la découpe. Pour surmonter cette difficulté Besicovitch profite de l'augmentation du nombre de pièces pour les regrouper de façon de plus en plus ingénieuse. Cette nouvelle façon de faire consiste en des regroupements successifs et son intérêt devient apparent quand le nombre de pièces est assez grand. L'exemple qui suit présente ce procédé de Besicovitch dans le cas d'une subdivision en seize pièces du secteur angulaire.



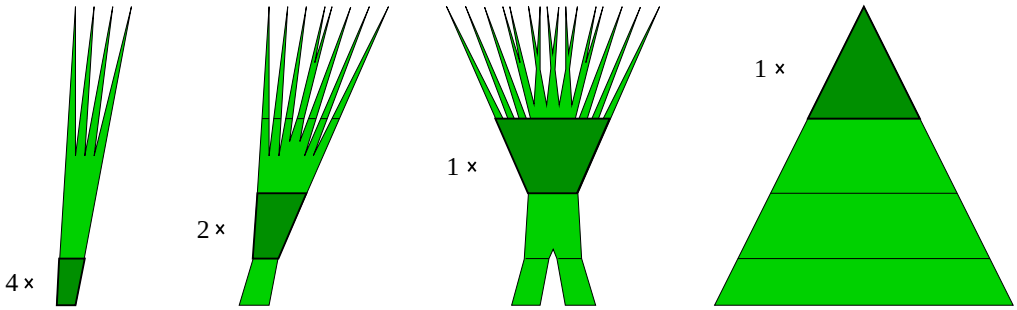
Pour plus de facilité dans le dessin et dans le calcul, ce procédé de subdivision et de déplacement des pièces est appliqué, non plus au secteur angulaire seul, mais à tout le triangle qui le contient. Dans la figure de droite les seize pièces de la subdivision sont regroupés quatre par quatre. La première étape dans la construction de Besicovitch est, à partir de ce regroupement, de former quatre paquets de pièces assemblées selon leurs bases.



Puis on réunit ces paquets deux par deux en paquets plus gros, ce regroupement se faisant non pas sur la base mais à une certaine hauteur : sur le dessin ci-dessus le segment de jonction est représenté en trait fort. On réitère ce procédé avec les nouveaux paquets à de nouvelles hauteurs, jusqu'à n'obtenir qu'une seule figure. La transformation proposée ici, à partir du triangle de départ, compte en tout trois étapes.



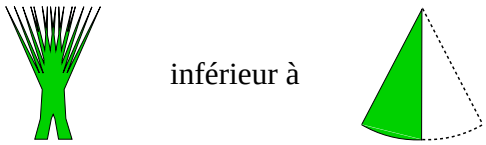
La construction de Besicovitch se résume donc en une subdivision du triangle initial en lamelles qui sont ensuite assemblées en gerbes, successivement par les pieds, par la taille puis par les épaules. Cette manœuvre, qui peut sembler insolite, est cependant une des idées maîtresses de la démonstration de Besicovitch : elle permet de contrôler le recoupement sur toute la hauteur des gerbes et de diminuer significativement l'aire occupée. Certes il est bien clair, compte tenu de tous ces recoupements, que la figure obtenue à la fin a une aire inférieure à celle du triangle initial, mais tout le problème est de savoir de combien. En fait, un raisonnement élémentaire va montrer que cette aire ne dépasse pas la moitié de celle du triangle.



Tout réside dans la comparaison astucieuse des aires des étages de la figure de Besicovitch et celles des étages d'un triangle. Dans les dessins ci-dessus la figure finale est représentée en troisième position, elle est constituée de quatre étages clairement visibles, le troisième étant mis en évidence par une zone grisée. Par construction, le premier étage est la superposition du premier étage des quatres gerbes visibles à l'étape numéro un ; l'une de ces gerbes est dessinée à gauche, son premier étage est grisée. Le premier étage de la figure finale a donc une aire plus petite que celle des quatres trapèzes puiqu'il résulte de la superposition de

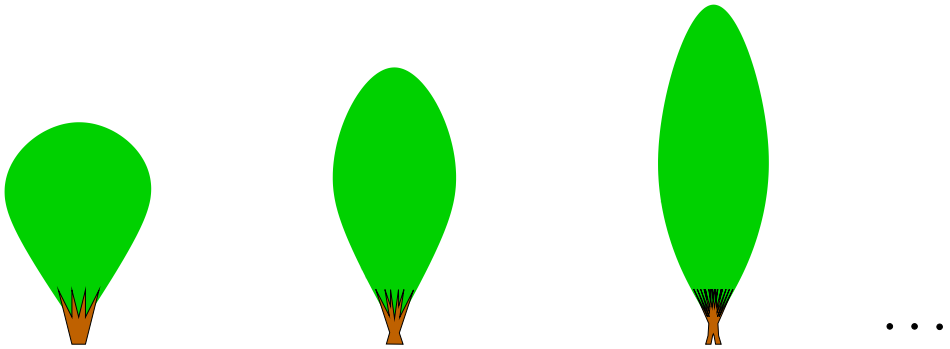
ceux-ci. De même avec le second étage : on compare son aire avec celles des trapèzes qui forment ce même second étage à l'étape numéro deux, l'un d'entre eux est représenté dans la seconde illustration. L'aire du troisième étage est bien sûr inférieure à celle du trapèze qui le contient. Quant au dernier étage, il est plus petit que le quatrième étage du triangle initial. En effet bien qu'il soit assez complexe sur la figure finale, ce dernier étage est composé des morceaux réorganisés de la coiffe du triangle. Tout compte fait, on obtient donc :

Dans cette construction le triangle choisi au départ a une hauteur égale à sa base : elle vaut 1. Si l'on partage la hauteur en 32 segments égaux, les étages se placent alors successivement aux altitudes 5, 12 et 20. Avec ces données, l'aire cumulée des huit éléments représentés plus haut vaut 0.23767..., puisque celle du triangle est 0.5, on a bien abouti à une figure qui ne dépasse pas la moitié de celle de départ. Dans ce cas précis ce procédé a permis de diviser l'aire du triangle de départ par deux.



De façon plus générale, en multipliant le nombre de découpages du triangle ainsi que le nombre d'étages il est possible de diviser l'aire non plus par deux mais par un nombre aussi grand qu'on le souhaite. Besicovitch propose une formule qui donne, selon la réduction d'aire que l'on désire, le nombre de pièces, la hauteur de chaque étage et les regroupements à effectuer. Cette formule dit par exemple que onze étages et 24 117 248 pièces assurent une division par cinq de l'aire ; trente étages et 12 393 906 174 523 604 992 pièces garantissent une division par dix et ainsi de suite. En résumé, quitte à le découper en un très grand nombre de pièces, on peut réarranger le triangle initial de sorte que son aire devienne aussi petite que l'on veut. Par conséquent, d'après ce qui a été dit en début de paragraphe, l'aiguille peut se déplacer entre les deux positions extrêmes du secteur angulaire en balayant une aire arbitrairement petite. Le théorème de Besicovitch est ainsi démontré puisque de tels secteurs angulaires mis bout à bout permettent le retournement complet de l'aiguille.

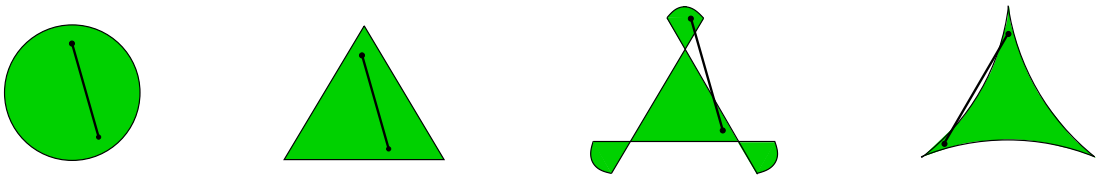
Concrètement la représentation des figures ainsi obtenues pose problème à cause du nombre de pièces qui devient très vite astronomique et à cause des « antennes » qu'il faut ajouter au bout de chacune d'elles pour permettre le déplacement de l'aiguille de l'une à l'autre. Le dessin ci-dessus représente à gauche la figure à quatre pièces au grand complet et à droite une représentation plus schématique. Ensuite, plus le nombre de pièces grandit, plus les antennes s'allongent de façon à ce que se poursuive la diminution de l'aire.



Finalement, le procédé de Besicovitch rend possible la construction d'une succession infinie de figures dont l'aire devient aussi faible qu'on le souhaite et qui répondent toutes au problème de Kakeya.

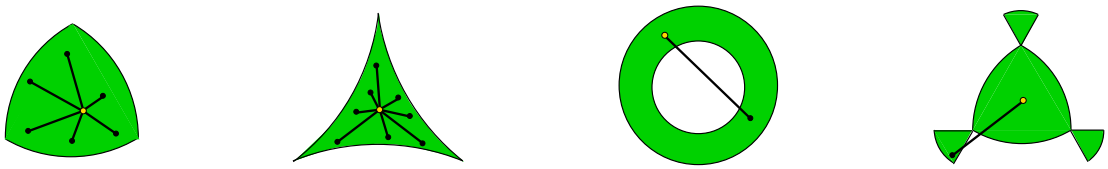
L'énigme des domaines étoilés

Après cette solution de Besicovitch une question se pose : en a-t-on terminé avec le problème de Kakeya ? On peut effectivement se satisfaire de cette construction et clore ici notre recherche. On peut aussi considérer à nouveau ladite construction et trouver insatisfaisante une figure composée de milliards et de milliards de pièces assemblées entre elles de manière complexe. C'est pourquoi certains mathématiciens ont poursuivi l'étude de ce problème en se restreignant cette fois à des catégories de figures plus simples. L'une d'entre elle, très utilisée en mathématique, est celle des *convexes*. Une figure est dite convexe si tout segment dont les extrémités sont dans cette figure est entièrement contenu dans celle-ci. L'illustration ci-dessous représente deux convexes suivis de deux non-convexes. Pour chacun de ces derniers ont été dessinés deux points tels que le segment les joignant déborde du contour.



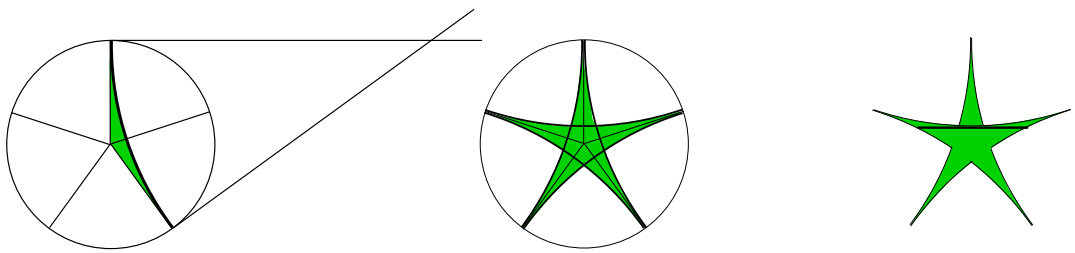
Convexe | Convexe | Non convexe | Non convexe

Le problème de Kakeya pour les domaines convexes admet une solution, le mathématicien hongrois Julius Pal démontre en effet en 1921 qu'il n'existe pas de domaine convexe plus petit que le triangle équilatéral et qui autorise le retournement de l'aiguille. Dans le cas des figures convexes, le problème de Kakeya est donc clos : la solution est tout simplement le triangle équilatéral ayant pour hauteur l'aiguille. Une autre catégorie plus large de figures pour laquelle le problème se pose est celle des domaines *étoilés*. Une figure est étoilée s'il existe un point de cette figure tel que tout segment qui relie ce point à un autre point de la figure est entièrement contenu dans celle-ci. Concrètement cela signifie qu'il existe un point du domaine à partir duquel un observateur pourrait voir tous les autres points du domaine. C'est le cas des deux premiers domaines représentés ci-dessous : un observateur qui se placerait au centre de l'un d'eux pourrait voir la totalité des points. Ce n'est pas le cas des deux autres domaines, par exemple pour l'anneau ; en effet, où qu'il soit placé, l'observateur ne peut voir le point qui lui est diamétralement opposé.



Etoilé | Etoilé | Non étoilé | Non étoilé

Dans le cadre des domaines étoilés, le problème de Kakeya n'a toujours pas été résolu. On sait seulement qu'il n'y a pas de théorème du type de celui de Besicovitch puisque Cunningham à montré en 1971 qu'un tel domaine, s'il permet le retournement de l'aiguille a forcément une aire supérieure à $\frac{\pi}{108}$ c'est-à-dire 0.02908... La meilleure solution que l'on connaisse à l'heure actuelle est celle de Bloom et Shoenberg et elle date de 1965. Elle s'obtient à partir d'étoiles régulières construites sur le cercle comme expliqué dans le dessin ci-dessous.



Dans le cas de l'étoile à cinq branches, qui permet bien la rotation de l'aiguille représentée à droite, on trouve une aire égale à 0.31680... Si l'on augmente le nombre de branches de l'étoile, on observe alors une lente décroissance de son aire, le tableau ci-dessus en donne quelques valeurs.

Nombre de branches	11	101	1001	10001
Aire de l'étoile	0.29044377...	0.2843301...	0.2842589...	0.2842582...

Au fur et à mesure que le nombre de branches s'accroît, l'aire s'approche aussi près que l'on veut de la valeur $\frac{5-2\sqrt{2}}{24}\pi = 0.284258224...$ Ce nombre est le meilleur connu actuellement. L'énigme des domaines étoilés est la suivante : peut-on descendre au dessous de cette valeur ?

La conjecture de Kakeya

L'année 1905 marque un tournant dans l'histoire de la science. En effet, à quelques mois d'intervalle trois résultats majeurs viennent bouleverser la vision du monde qui était celle des savants d'alors et c'est une seule et même personne qui est à l'origine de ces trois découvertes : Albert Einstein (portrait en tête de chapitre). La première d'entre elles est celle de l'effet photo-électrique, un phénomène physique qui met en évidence l'existence de ces fameux « grains de lumière » appelés photons. La lumière n'est donc pas seulement une onde, comme on le pensait depuis Newton, elle revêt également un aspect corpusculaire : les photons qui bombardent une surface métallique sont capables d'en arracher des électrons. Cette découverte fondamentale lui vaudra le prix Nobel de Physique. Néanmoins c'est la deuxième de ces découvertes qui a donné à Einstein sa renommée universelle, il s'agit de la très célèbre théorie de la relativité et de la non moins célèbre formule $E = mc^2$. Désormais le temps n'est plus absolu. Matière et énergie se confondent. Quant à la troisième découverte ce n'est ni plus ni moins que celle de l'existence des atomes. Ceux-ci, totalement invisibles sous la lentille des microscopes de l'époque, ne pouvaient être observés et Einstein n'a pu déduire leur existence qu' à partir de l'interprétation d'un phénomène inexplicable jusqu'alors : le *mouvement brownien*.

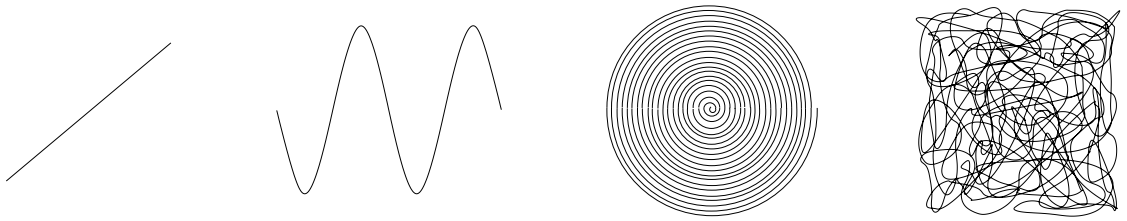
La découverte de ce mouvement, comme celle de la péniciline ou de la radioactivité, fait partie de ces découvertes fortuites qui ont jalonné l'histoire de la science. En 1827, le botaniste Robert Brown observe au microscope des poussières organiques en suspension dans le fluide contenu dans un grain de pollen. Il est immédiatement intrigué par l'étrangeté de leur mouvement : les particules se meuvent de façon chaotique et imprédictible à l'intérieur du liquide en des trajectoires irrégulières et incessantes. Brown pensa tout d'abord à un phénomène biologique, mais l'observation de ces mêmes trajectoires pour des particules minérales dans une eau parfaitement vierge le dissuada de cette première explication. En fait, la raison de ce phénomène a tenu en haleine les savants jusqu'à cette fameuse année 1905. En réalité ce mouvement résulte de l'agitation permanente des molécules d'eau qui en bombardant les particules leur impriment ces trajectoires désordonnées. Ces molécules d'eau ont une taille bien plus petite que celle des poussières organiques et étaient donc hors de portée des moyens optiques de l'époque. En revanche les poussières sont, elles, observables au microscope et leur mouvement perpétuel trahit la présence de ces invisibles molécules d'eau en constante agitation. C'est en comprenant que le mouvement brownien était dû à l'action de particules bien plus petites qu'Einstein put en déduire l'existence des atomes. Des travaux ultérieurs lui permettront même d'évaluer leur taille. Mais l'histoire ne s'arrête pas là. Le mouvement brownien, dont la cause était enfin comprise, commença à intriguer les mathématiciens. Ils se rendirent compte que ce mouvement était l'exemple universel du mouvement aléatoire. En effet, rien d'autre que le hasard ne semble régir la course d'une particule et ses incessants changements de direction. De ce hasard résultent des trajectoires particulièrement tortueuses qui ne ressemblent en rien aux courbes que les mathématiciens avaient l'habitude de rencontrer jusque-là. Un exemple de telle trajectoire est représenté ci-dessous à différentes étapes, on y observe un début de trajectoire qui s'enchevêtre ensuite de plus en plus à mesure qu'elle se développe. La complexité des trajectoires browniennes a été source de grandes difficultés pour les mathématiciens, mais une fois ces difficultés surmontées le mouvement brownien est devenu un outil incontournable pour étudier les phénomènes où le hasard intervient. Aujourd'hui il est au cœur de la science qui étudie le hasard : la science des probabilités.

L'étude mathématique du mouvement brownien a révélé un autre phénomène déroutant : une trajectoire brownienne est une *surface sans aire*. Un tel objet est un être mathématique paradoxal qui a tout d'une surface mais dont l'aire est pourtant égale à zéro. Il se trouve que ces figures étranges sont au cœur du problème de Kakeya tel qu'il se pose aujourd'hui. En effet, alors que l'affaire semblait classée après le remarquable résultat de Besicovitch, l'irruption de ces figures inconnues va donner au problème une nouvelle actualité. Il en découlera ce que les mathématiciens appellent la *conjecture de Kakeya*.

Le monde des objets d'aire nulle

Le théorème de Besicovitch dit qu'il est possible de retourner l'aiguille dans une figure d'aire aussi petite que l'on souhaite. Au vu de ce résultat, il est très tentant pour l'esprit de simplifier la situation et de se poser une question plus directe : existe-t-il une figure d'*aire nulle* dans laquelle le retournement soit possible ? Si tel est le cas, la réponse au problème de Kakeya tiendrait en quelques mots : « la plus petite aire, c'est zéro ». Cette simple formulation recèle une difficulté conceptuelle importante : par quel miracle certaines « surfaces » pourraient-elles avoir une aire égale à zéro ? Comment une figure, qui n'est pas *rien* puisque l'aiguille s'y retourne, pourrait-elle ne recouvrir aucune aire ? C'est alors que le mouvement brownien entre en scène. Cette ligne qui est plus qu'une ligne, cette surface qui n'en est pas une, ouvre une première fenêtre sur un vaste territoire : celui des objets d'aire nulle.

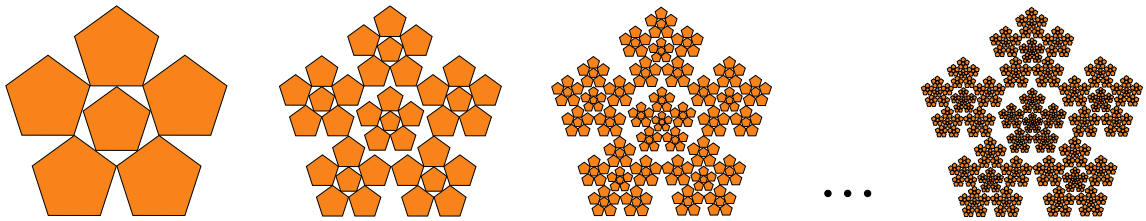
En premier lieu ce monde des objets d'aire nulle comporte certaines figures géométriques très familières comme le point et la droite. En effet ceux-ci sont sans épaisseur, ils ne recouvrent aucune surface, l'aire qu'ils occupent est égale à zéro. De la même façon, des courbes que l'on a l'habitude de tracer, comme une parabole, une sinusoïde ou bien une spirale, ont également une aire nulle. Le cercle en tant que courbe, c'est-à-dire en tant que ligne tracée sur le plan, ne recouvre lui non plus aucune aire.



On pourrait croire naïvement qu'une courbe a forcément une aire égale à zéro, les mathématiciens eux-mêmes n'en ont jamais douté jusqu'à l'année 1890 où le mathématicien italien Giuseppe Péano fit cette surprenante découverte : il existe des courbes qui remplissent complètement toute la surface d'un carré, c'est-à-dire des courbes si tortueuses qu'elles couvrent sans la moindre lacune *tout* le carré. En particulier l'aire occupée par ces courbes est exactement celle du carré, elle ne vaut donc pas zéro. Ce résultat a énormément frappé les esprits de l'époque : la certitude unanimement partagée selon laquelle une courbe et une surface sont deux choses de nature bien distincte était ainsi remise en question. Il est d'ailleurs problématique de représenter ces courbes de façon intelligible puisque l'image que l'on obtiendra *in fine* sera toujours un carré uniformément rempli. On peut cependant les imaginer comme des sortes de gribouillis, c'est-à-dire des courbes un peu analogues à celle représentée à droite ci-dessus, mais si denses qu'elles recouvrent tout le carré et dont l'aire, par conséquent est celle du carré. Il faut néanmoins prendre garde à de telles représentations mentales induites par l'observation d'un dessin car une courbe, au sens mathématique du terme n'a pas d'épaisseur et ne devrait donc pas être « visible ». Or

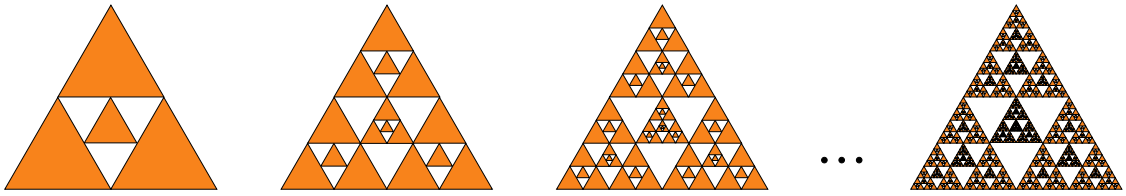
sur un dessin, toute courbe a une épaisseur qui est celle du trait qui la représente, il devient ainsi facile *sur un dessin* de tracer une courbe qui recouvre tout le carré, il suffit simplement de colorier ledit carré comme le ferait un enfant muni d'un crayon. Toute la difficulté du travail de Péano a bien été de découvrir une véritable courbe mathématique, donc sans épaisseur, recouvrant le carré. Cette courbe étant trop complexe pour pouvoir être décrite ici, on se contentera d'en accepter l'existence. Quoi qu'il en soit, l'exemple de Péano montre qu'il faut être prudent si l'on utilise les courbes pour construire des objets d'aire nulle. D'autant plus que l'on cherche à construire des figures qui sont certes d'aire nulle mais qui, tout en n'ayant pas d'aire, occupent néanmoins suffisamment de place pour que l'on puisse y retourner une aiguille.

Pour obtenir de telles figures, qui ne recouvrent aucune surface tout en étant moins rudimentaires qu'une simple ligne, il existe un procédé très direct qui consiste en une suite de figures dont l'aire s'amenuise par évidements successifs, jusqu'à l'annulation. Plus précisément, on réitère à l'infini une même opération d'évidement décidée au départ. Contrairement à ce que pourrait laisser penser l'intuition et en dépit du nombre infini d'étapes, l'objet initial n'a pas forcément disparu, il peut en rester une trace qui est alors un objet d'aire nulle.



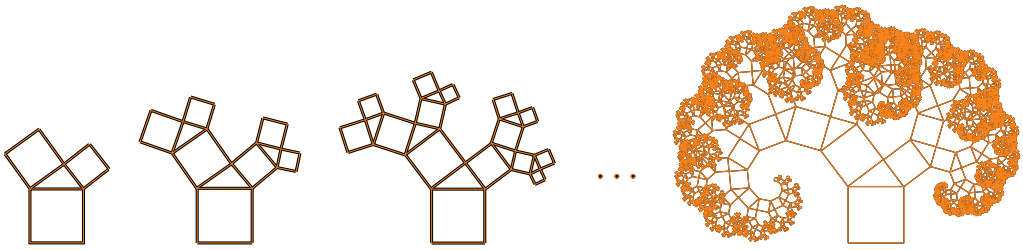
Aire = 1 Aire = 0.82498... Aire = 0.68059... Aire = 0

Dans l'illustration ci-dessus, l'objet initial est un assemblage de pentagones et l'opération d'évidement consiste à remplacer chaque pentagone par une réduction *ad hoc* de la figure de départ. L'objet qui en résulte, en poursuivant ce procédé indéfiniment, a une aire égale à zéro. A chaque étape l'aire des constructions intermédiaires est de plus en plus petite et, à la limite, elle vaut zéro. L'objet final étant le fruit d'une infinité d'étapes, l'esprit a du mal à le concevoir dans sa totalité. Cette situation se rencontre fréquemment en mathématiques, y compris pour les objets les plus simples : une droite par exemple se conçoit mentalement comme un segment que l'on peut prolonger indéfiniment, d'ailleurs c'est un segment que l'on dessine et c'est l'imagination qui fait le reste. Dans le cas du pentagone, au lieu de ce prolongement par extension, le travail de l'imagination procède en un évidement réitéré indéfiniment à l'intérieur de la figure. Ajoutons qu'en toute rigueur cette figure, tout comme la droite, ne devrait pas être visible, son aire étant nulle. Par ce même procédé on peut fabriquer toutes sortes d'objets dont l'aire vaut zéro, en voici un formé à partir du triangle.

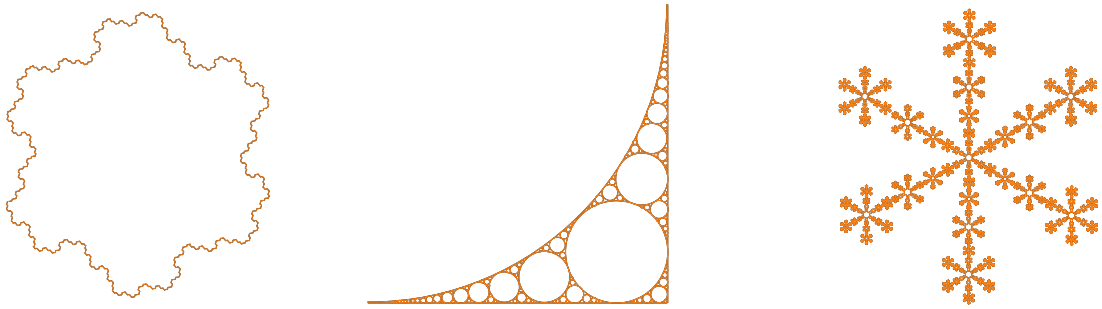


Aire = 1 Aire = 0.8125 Aire = 0.66015... Aire = 0

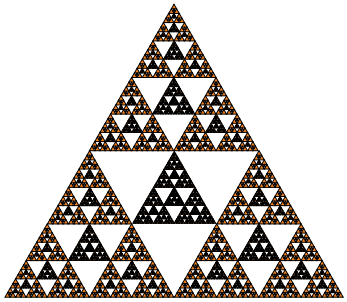
A l'opposé de ce procédé d'évidement, on peut imaginer un procédé d'extension. En effet, cette idée initiée par Péano d'un ligne indéfiniment repliée et qui ne cesse de se recouper ou de se ramifier donne lieu à certaines figures dont l'aire reste égale à zéro (contrairement à celle de Péano) mais dont la structure est plus riche que celle d'une courbe ordinaire. En voici représenté un exemple que l'on nomme *arbre de Pythagore.*



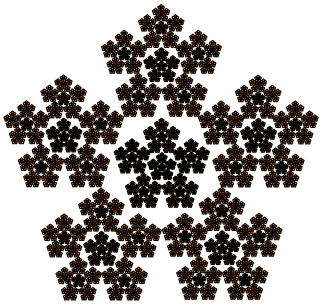
Ici, tous les éléments qui se succèdent ont une aire égale à zéro, pourtant la figure qui en résulte, d'aire nulle également, a une allure très ressemblante à celle du triangle ou du pentagone évidés. Oublions maintenant le mode de fabrication et présentons quelques uns de ces étranges objets dépourvus d'aire que l'on vient de découvrir. En premier lieu, se trouve représenté un objet quasi-filiforme connu sous le nom d'*île de Gosper*. L'*empilement d'Apollonius* qui lui succède semble un peu plus dense. Viennent ensuite *le flocon* obtenu à partir d'hexagones et les fameux polygones évidés à trois et cinq côtés suivis de leur cousin à sept côtés. La signification des nombres qui apparaissent au dessous de chacun d'eux sera expliquée dans les lignes qui suivent.



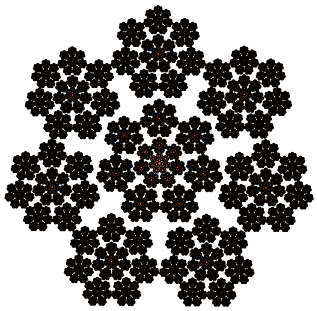
dim. = 1.12... dim. =1.31... dim. = 1.50...



dim. = 1.72...



dim. = 1.80...



dim. = 1.83...

Si ces figures sont bien toutes d'aire nulle, on observe cependant qu'elles semblent occuper l'espace de plus en plus densément. Ainsi l'empilement d'Apollonius apparaît presque filiforme alors que la dernière figure noircit bien davantage l'espace qu'elle occupe. L'aire de ces objets qui, répétons-le, vaut zéro, ne permet donc pas de rendre compte de cette différence de « densité ». Pour matérialiser cette impression visuelle on ne parle plus de l'aire mais d'une autre quantité appelée *dimension fractale* de la figure. C'est cette valeur qui est inscrite en dessous de chacun des exemples qui précèdent. Elle est d'autant plus proche de un que la figure semble filiforme et plus proche de deux qu'elle ressemble à une surface et ceci est bien cohérent avec l'idée intuitive que l'on se fait de la dimension : un objet de dimension un ressemble à une ligne, un objet de dimension deux à une surface. Les objets présentés ici sont intermédiaires entre la ligne et la surface, par conséquent la dimension qui leur correspond est intermédiaire entre un et deux, c'est la dimension fractale.

Cette dimension fractale traduit certes l'idée intuitive d'« épaisseur » de ces figures, mais c'est avant tout une quantité mathématique qui, tout comme une aire ou une longueur, résulte de formules précises. Nous n'entrerons pas dans le détail de ces formules car celles-ci, sans être démesurément compliquées, nécessitent une certaine abstraction. Quoiqu'il en soit, cette dimension fractale donne une prise sur ces figures géométriques complètement nouvelles qui ne possèdent ni longueur ni surface. La géométrie de notre enfance était peuplée de cercles, de triangles, de carrés... dont on pouvait justement calculer l'aire ou la longueur. Les objets fractals ne se laissent pas aussi facilement appréhender et la dimension fractale est l'une des rares quantités ayant un sens intuitif dans ce monde d'une complexité inouïe.

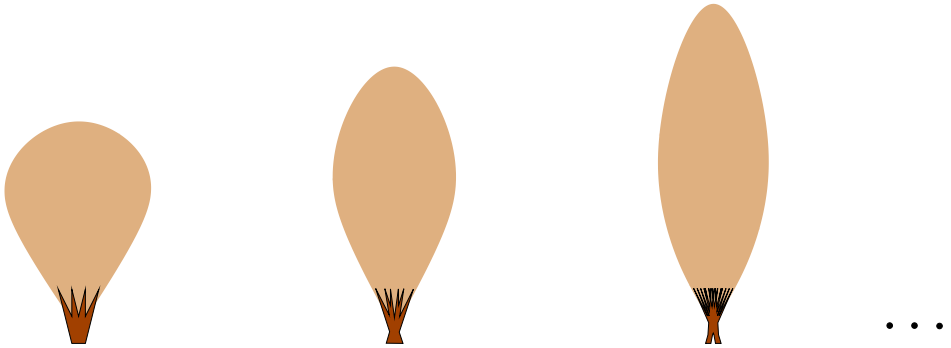
Un des phénomènes les plus surprenants révélés par la dimension fractale est l'existence de ces fameuses *surfaces sans aire*. En effet, aussi compliquées que puissent paraître des objets comme l'empilement d'Apollonius ou l'arbre de Pythagore, ils n'en demeurent pas moins issus de constructions parfaitement ordonnées et ne mettent en évidence qu'une toute petite partie de l'immense complexité du monde des objets d'aire nulle. En particulier et aussi incroyable que cela puisse paraître, il existe des objets d'aire nulle dont la dimension fractale est égale a deux : par leur façon d'occuper l'espace ils s'apparentent

à des surfaces mais ils conservent une aire égale à zéro. La représentation mentale de telles figures est un défi à l'imagination car rien ne semble plus paradoxal qu'une surface qui serait dépourvue d'aire. La clef de ce paradoxe provient du fait qu'une telle figure n'est pas réellement une surface au sens où on l'entend habituellement, elle *occupe* l'espace comme une surface mais n'en est pas une. Plus surprenant encore, ces objets *a priori* artificiels et très abstraits, se rencontrent dans la nature, et le mouvement brownien grâce auquel Einstein a pu démontrer l'existence des atomes en fait justement partie. C'est le mathématicien Paul Lévy qui a révélé, cent ans après sa découverte, l'appartenance du mouvement brownien au monde des surfaces sans aire.

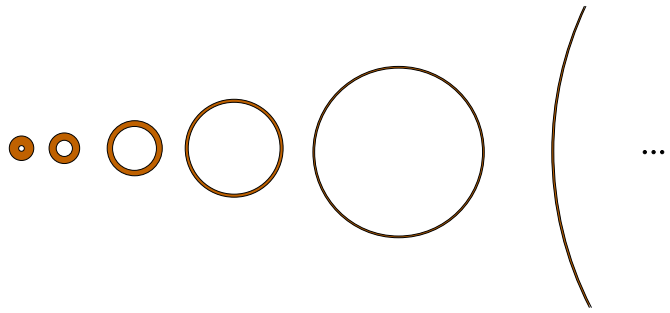
Tout ceci peut paraître fort éloigné du problème de Kakeya, pourtant si on examine la surprenante réponse de Besicovitch on se rend compte que celle-ci fournit pour chaque aire, aussi petite soit-elle, une figure permettant le retournement de l'aiguille. Ainsi, ce que produit la construction de Besicovitch n'est autre qu'une succession de figures de plus en plus petites en aire. Ceci n'est pas sans rappeler les différentes suites de figures rencontrées plus haut aboutissant toutes à des objets d'aire nulle comme l'arbre de Pythagore ou le pentagone évidé. Quel peut-être l'objet final qui découle de la succession de Besicovitch ? Qu'en est-il de sa dimension fractale ? Est-on en présence d'un objet plutôt filiforme ? Plutôt plein ? Ou même, pourquoi pas, d'une surface sans aire...

Une nouvelle jeunesse pour la question de Kakeya

La première tentative pour répondre à ces questions réserve une bien mauvaise surprise : la succession de figures proposées par Besicovitch n'aboutit pas. Certes, l'aire devient à chaque étape plus proche de zéro pourtant ce processus peut se poursuivre indéfiniment sans jamais trouver son aboutisssement en un objet final. Et bien sûr celui-ci n'existant pas, la question de sa dimension fractale ou celle de son allure générale est vide de sens. Que s'est-il donc passé ? Les choses s'éclairent en réexaminant les figures de Besicovitch : celles-ci ne restent pas confinées dans une zone précise mais ont au contraire tendance à s'étendre indéfiniment vers le haut. Ceci est bien visible sur la représentation schématique ci-dessous.

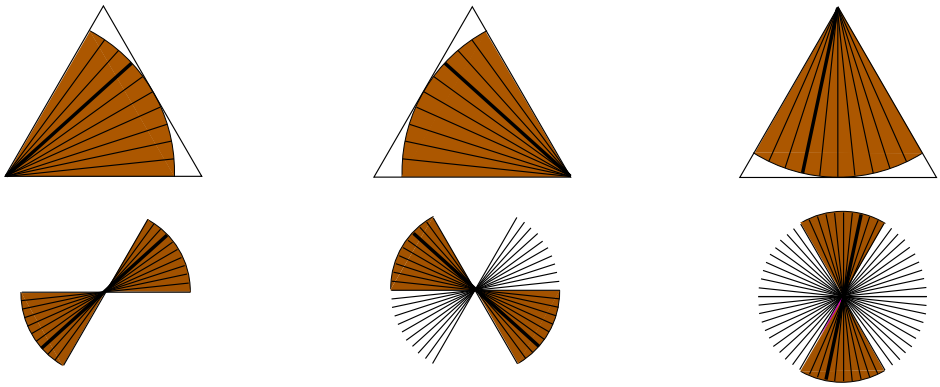


Le phénomène d'extension permanente que l'on voit ici empêche l'apparition d'un objet final. En effet, il repousse toujours plus loin les contours de cet éventuel objet final et le fait disparaître à l'infini. Cette situation est en fait très fréquente et l'on peut plus facilement appréhender ce phénomène sur des exemples plus simples comme celui des anneaux présenté ci-dessous.

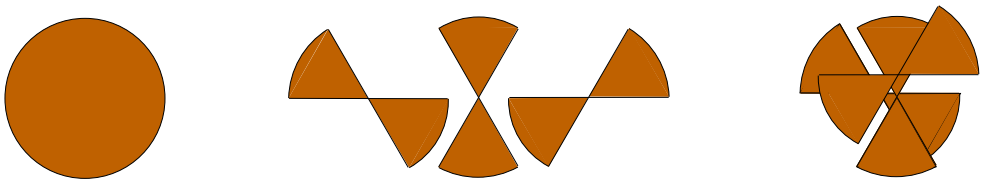


Dans cette succession l'épaisseur des anneaux est divisée par trois et le diamètre multiplié par deux à chaque étape. L'aire de ces anneaux décroît irrémédiablement vers zéro mais leur diamètre étant chaque fois plus grand, ils s'étendent indéfiniment dans l'espace de la feuille. L'objet final, sans cesse repoussé, disparaît ainsi à l'infini. Rétrospectivement, on constate que les suites présentées auparavant et qui aboutissaient aux fameuses figures fractales étaient composées d'objets n'excédant jamais un certain périmètre, ce qui rendait impossible ce phénomène d'extension infinie.

Encore une fois, en s'interrogeant sur la dimension fractale de la figure engendrée par la suite de Besicovitch, on a brûlé les étapes et supposé comme allant de soi l'existence d'une figure finale. En réalité le théorème de Besicovitch donne simplement une suite d'objets dont l'aire décroît montrant ainsi qu'il n'y a pas de limite à la petitesse des figures où l'aiguille se retourne, sans qu'il y ait d'objet final. Cette déconvenue n'est cependant que passagère, car il est possible d'obtenir malgré tout une suite de figures qui ait un aboutissement, à condition de s'autoriser une petite modification dans la question de Kakeya. Cette modification consiste en l'abandon du mouvement proprement dit : on ne demande plus à l'aiguille de se mouvoir à l'intérieur d'une figure jusqu'à son retournement, mais simplement de pouvoir être placée dans *toutes les directions possibles* à l'intérieur de celle-ci. Il s'agit d'un affaiblissement des exigences de la question de Kakeya puisque toute figure qui permet la rotation de l'aiguille contient toutes les directions possibles de cette aiguille. En effet, au cours d'une rotation complète l'aiguille balaie successivement toutes les directions du plan, c'est ce que met en évidence le dessin ci-dessous où sont représentées les différentes positions de l'aiguille lors d'un retournement ainsi que les directions correspondantes.



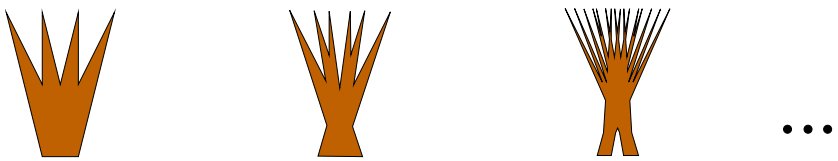
À l'inverse, on peut concevoir des figures à l'intérieur desquelles l'aiguille puisse occuper toutes les directions du plan sans pour autant que le mouvement de rotation complet y soit possible, l'illustration ci-dessous en donne un exemple :



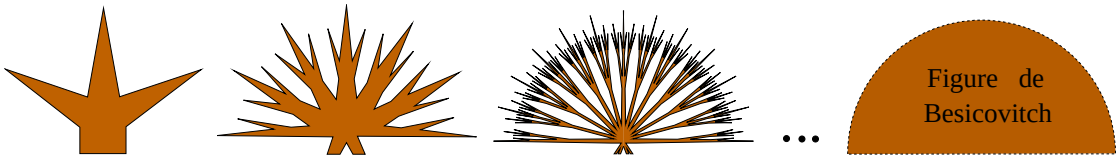
Le dernier dessin résulte de la superposition de trois morceaux du disque initial, si l'on peut toujours y placer l'aiguille dans n'importe quelle direction, la rotation complète y est interdite. Ainsi, en demandant à l'aiguille d'occuper toutes les directions au lieu d'exiger son retournement, on se laisse beaucoup plus de liberté quant au choix de la figure. Dans ces conditions le problème de Kakeya s'énonce de la façon suivante :

Nouveau problème de Kakeya. – *Existe-t-il une figure de plus petite aire qui contient l'aiguille dans toutes ses directions ?*

Autrement dit, au lieu d'une figure permettant le retournement de l'aiguille, on se contente d'une figure dans laquelle on puisse placer l'aiguille dans n'importe quelle direction du plan. Ainsi libérées de la continuité du mouvement, les figures de Besicovitch peuvent être débarrassées de tous les éléments nécessaires à cette continuité, c'est-à-dire des fameuses « antennes » responsables de leur extension verticale. Ces nouvelles figures qui répondent au nouveau problème de Kakeya demeurent cette fois confinées dans un domaine bien delimité, elles ne s'étendent plus à l'infini.



Ainsi élaguée, cette suite n'aboutit malheureusement pas davantage, mais Besicovitch en a construit une seconde, très similaire dans sa conception et qui cette fois conduit bien à une figure finale. La représentation qui en est donnée ci-dessous a peu à voir avec la réalité mais sert uniquement à fixer les idées.



A cause de son extrême complexité la figure finale n'est pas dessinée, elle a le mérite d'exister et cela nous suffit. Avec elle, l'aire la plus petite possible – zéro – est enfin atteinte. En cette figure mystérieuse le nouveau problème de Kakeya trouve enfin sa résolution ultime et le théorème de Besicovitch son dernier perfectionnement :

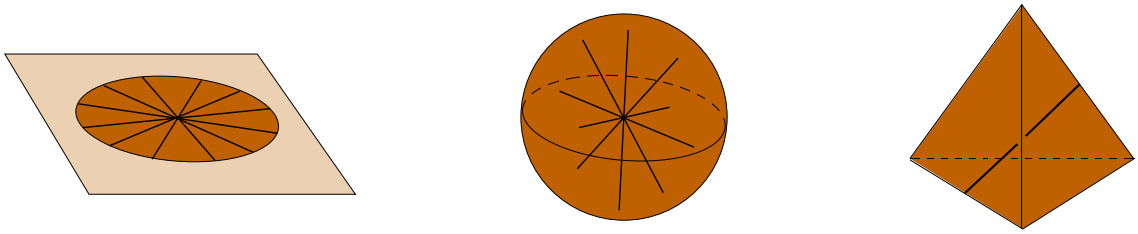
Nouveau théorème de Besicovitch. – *Il existe une figure d'aire nulle qui contient l'aiguille dans toutes ses directions.*

Qu'en est-il de cette figure de Besicovitch qui offre une réponse si claire et si directe au nouveau problème de Kakeya ? Celle-ci étant l'aboutissement d'une succession infinie d'objets ayant une aire toujours plus petite, il se pose alors tout naturellement la question de sa dimension fractale. En d'autres termes la figure de Besicovitch a-t-elle un aspect plutôt filiforme ou plutôt plein ? Il s'avère que la dimension fractale de cette figure est égale à deux. Tout comme le mouvement Brownien, cette figure fait donc partie de ces fameux objets extrêmes rencontrés plus haut, c'est une « surface sans aire ». Dans le monde des objets d'aire nulle, elle est aux antipodes des figures filiformes et revêt l'aspect « plein » d'une véritable surface. *A posteriori* ce résultat paraît assez raisonnable, il semble en effet intuitivement naturel qu'il faille une certaine place pour contenir l'aiguille dans toutes ses directions et on imagine mal qu'une figure filiforme puisse convenir. En d'autres termes, la présence d'une densité minimale pour répondre au problème de Kakeya force la figure de Besicovitch à recouvrir l'espace comme une surface. Même si son aire est nulle, sa dimension fractale doit être égale à deux, comme pour une surface ordinaire.

Dans ce problème, comme dans toutes les questions en mathématiques, il faut néanmoins rester méfiant face à ses premières intuitions : qui aurait pensé, au départ de l'ouvrage, que la question de Kakeya nous aurait amené à ces objets dépourvus d'aire ? Pourquoi cette question ne conduirait-elle pas maintenant à des objets dont la dimension fractale serait plus petite que deux ? Un théorème démontré en 1971 par le mathématicien britannique Roy O. Davies met un terme à cette nouvelle interrogation : toute figure d'aire nulle répondant au problème de Kakeya doit avoir une dimension fractale égale à deux. Il y a donc une limite dimensionnelle à la petitesse de la figure si l'on veut qu'elle satisfasse à la condition de Kakeya, c'est-à-dire contenir l'aiguille dans toutes ses directions.

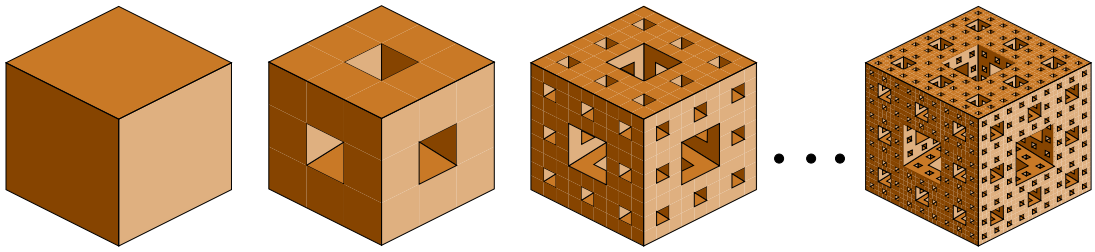
La conjecture de Kakeya

Le problème de Kakeya étant totalement résolu, quel intérêt peut-il encore présenter aux yeux des mathématiciens d'aujourd'hui ? Il se trouve que certaines questions importantes des mathématiques sont en connexion avec un problème de Kakeya « en dimension supérieure » qui, lui, n'est pas résolu. Ceci signifie que si l'on savait résoudre ce problème, il en découlerait des réponses à d'autres questions importantes des mathématiques qui à première vue en sont très éloignées. Quel est donc ce problème de Kakeya en dimension supérieure ? Jusqu'à présent il était question de retourner une aiguille à l'intérieur d'une surface plane ; le plan ayant deux dimensions on aurait pu nommer cette question le *problème de Kakeya en dimension deux*. Cette autre manière de poser la question conduit tout naturellement à s'interroger sur le devenir de ce problème dans l'espace à trois dimensions. Dans un tel espace, le problème de Kakeya revient à considérer non plus des figures qui contiennent l'aiguille dans toutes les directions du plan, mais des objets tridimensionnels qui contiennent l'aiguille dans toutes les directions de l'espace.



Si en dimension deux le disque est la première surface qui vient à l'esprit, c'est à la boule que l'on pense pour abriter en dimension trois l'aiguille dans toutes les directions. Mais il existe bien d'autres possibilités, par exemple le tétraèdre représenté ci-dessus contient lui aussi l'aiguille dans toutes les directions et son volume est moindre que celui de la boule. L'analogue en trois dimensions du problème de Kakeya est donc le suivant : existe-t-il un objet qui contient l'aiguille dans toutes les directions de l'espace qui soit de plus petit volume ? La réponse est tout aussi radicale qu'en dimension deux, un tel objet existe et son volume est nul, la construction de cet objet découle en droite ligne de celle de la figure de Besicovitch en deux dimensions.

Une fois la question du volume résolue, on s'interroge, tout comme en dimension deux, sur la « densité » des figures solutions c'est-à-dire leur dimension fractale. De façon tout à fait similaire à ce qui se passe pour les figures du plan, il existe des objets de l'espace intermédiaires entre une surface et un solide et qui, par conséquent, auront une dimension fractale située entre deux et trois. De tels objets peuvent s'obtenir par exemple au moyen d'un procédé d'évidement, dans l'illustration ci-dessous la pièce de départ est un cube et l'objet obtenu à la limite s'appelle *l'éponge de Sierpinski*, sa dimension fractale est de 2.73 environ.



Vol. = 1 Vol. = 0.74074... Vol. =0.54869... Vol. = 0

De même qu'en dimension deux ce genre de construction aboutit à des objets paradoxaux que l'on peut qualifier de « solides sans volume », ils correspondent aux surfaces sans aires du plan, ce sont des objets dont la dimension fractale vaut trois tout en ayant un volume égal à zéro. En parfaite analogie avec la dimension deux, il s'avère que tous les objets connus à l'heure actuelle qui ont un volume nul et qui répondent au problème de Kakeya sont de ce type. Se pose alors la question de réduire la dimension fractale, est-il possible qu'un objet-solution ait une dimension inférieure à trois ? Contrairement au cas de la dimension deux où le théorème de Davies clôt définitivement la question, personne ne sait à l'heure actuelle si un tel objet existe. Les mathématiciens pensent que non, ils énoncent :

Conjecture de Kakeya pour la dimension trois. – *La dimension fractale d'un objet qui contient l'aiguille dans toutes les directions de l'espace est trois.*

Ainsi, parmi les solides de volume nul, ceux qui vérifient la condition de Kakeya seraient forcément les plus « denses » possibles. Cette conjecture n'a jamais été validée et le résultat le plus avancé que l'on connaisse est dû à trois mathématiciens, Katz, Laba et Tao : la dimension fractale d'un tel objet est nécessairement supérieure à 2.5. C'est un résultat récent qui a été publié en 1999.

Le passage du problème de Kakeya dans le plan au même problème dans l'espace se faisant naturellement, on peut tout à fait envisager un passage similaire vers la quatrième dimension. On recherche alors des figures qui contiennent l'aiguille dans toutes les directions de l'espace à quatre dimensions et l'on s'interroge comme précédemment sur leur dimension fractale. Là encore on n'a jamais trouvé de figures-solutions dont la dimension fractale est plus petite que quatre. On est donc confronté *mutatis mutandis* à la même conjecture que celle énoncée plus haut. Tout aussi naturellement, on peut extrapoler la question de Kakeya aux dimensions 5, 6, 7, etc, et cela conduit toujours au même constat : il semble que la dimension fractale ne peut pas être diminuée. Les mathématiciens réunissent tout ceci en un unique énoncé, c'est la fameuse conjecture de Kakeya :

Conjecture de Kakeya. – *Dans l'espace à n dimensions, la dimension fractale d'un objet qui contient l'aiguille dans toutes les directions est n.*

En résumé, il peut y avoir une réduction du « volume » jusqu'à l'annulation mais la dimension, elle, demeure incompressible. Cette conjecture, qui peut sembler très abstraite puisqu'elle se place dans des dimensions autres que celles de l'espace tangible, présente néanmoins un grand intérêt pour les chercheurs car elle est en connexion avec d'autres « grandes questions » des mathématiques. De sa résolution découlerait celle de nombreux autres problèmes, le chapitre suivant en propose un exemple.

Perspectives

Depuis les années 90, on assiste à un regain d'intérêt pour le problème de Kakeya car des connexions inattendues ont été mises en évidence entre ce problème et d'autres questions importantes des mathématiques. De telles connexions sont très prisées par les mathématiciens car elles offrent un nouvel éclairage, donc souvent de nouveaux outils pour aborder la question de départ. Par conséquent, la mise en évidence de tels liens entre des problèmes *a priori* différents est souvent source de progrès. L'exemple le plus célèbre d'un lien particulièrement fécond est celui découvert par René Descartes au XVII$^{\text{ème}}$ siècle ; ce lien qui rapporte la géométrie à l'analyse est aujourd'hui bien connu de tous, c'est cette façon de repérer la position d'un objet grâce à des nombres qui se lisent sur des axes. Ces nombres sont les coordonnées de l'objet, nommÃ©es *cartésiennes* en hommage à ce savant Elles permettent de remplacer un raisonnement de géométrie par un travail sur des nombres et des formules mathématiques, on parle ainsi de *géométrie analytique*. Un autre exemple est la résolution toute récente du grand théorème de Fermat. Il s'agit d'un problème d'arithmétique que Fermat croyait avoir démontré et qui a résisté aux mathématiciens pendant plus de 250 ans. Ce n'est qu'en 1995 que le mathématicien Andrew Wiles réussit le tour de force d'en faire la démonstration, un exploit qui fut immédiatement salué par la presse. On ne peut pas donner ici ne serait-ce qu'une vague idée de cette démonstration, mais il est important de noter que celle-ci repose sur la découverte d'un lien entre deux

domaines distincts des mathématiques : les « formes modulaires » et les « courbes elliptiques ». Enfin un autre exemple particulièrement éloquent de la fécondité de ces connexions entre disciplines différentes est justement donné par le problème de Kakeya. En effet, à la fin des années 90 un lien insoupçonné a été mis au jour entre le problème de Kakeya et la répartition des nombres premiers. Ce lien n'a pas permis la résolution de la conjecture mais a ouvert la voie à une nouvelle façon d'aborder le problème et a conduit les mathématiciens Jean Bourgain (portrait en tête de chapitre, à gauche), Nets Katz, Izabella Laba et Terence Tao (portrait en tête de chapitre, à droite) à une solution partielle.

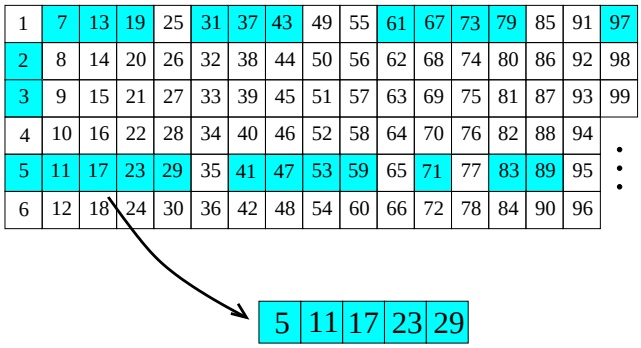
De Kakeya aux nombres premiers

La branche des mathématiques qui étudie les nombres entiers est appelée l'*arithmétique*. Une question centrale de cette science est celle de la compréhension des nombres premiers. Les nombres premiers sont les nombres qui ne se divisent que par eux-mêmes et par un, ils sont inscrits en gras dans la liste ci-dessous.

1 **2** **3** 4 **5** 6 **7** 8 9 10 **11** 12 **13** 14 15 16 **17** 18 **19** 20 21 22 **23** 24 25 26 27 28 **29** 30 **31** 32 33 34 35 36 **37** 38 39 40 **41** 42 **43** 44 ...

Par exemple le nombre 15 qui peut s'écrire 3×5 n'est pas un nombre premier alors que 7 en est un. Le nombre 1 par convention n'est pas premier. On sait depuis Euclide qu'il existe une infinité de nombres premiers mais cette infinité n'est pas régulièrement répartie. Il y a 168 nombres premiers entre 0 et 1000, il en reste 106 entre 10000 et 11000 et seulement 75 entre 1000000 et 1001000. Le phénomène de raréfaction des nombres premiers que l'on observe ici se poursuit indéfiniment. La démonstration rigoureuse de cette observation fut un grand problème de l'arithmétique du XIX$^{\text{ème}}$ siècle, elle a finalement été résolue en 1896 par Jacques Hadamard et Charles Jean de La Vallée Poussin.

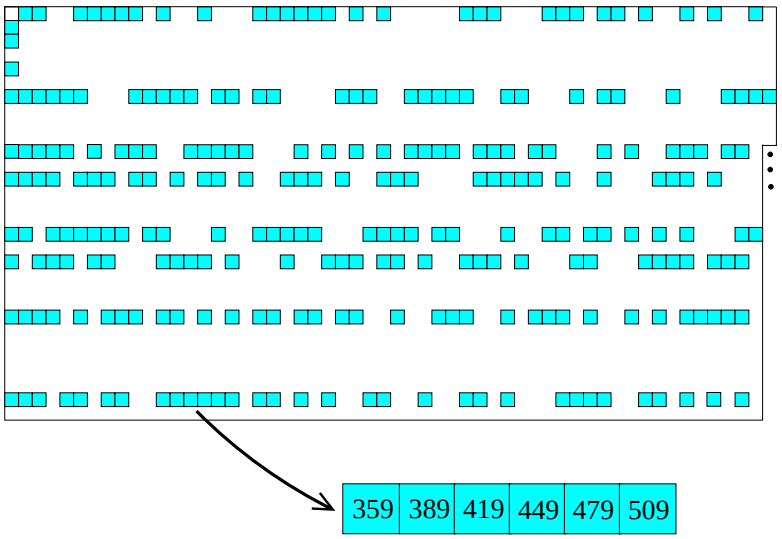
L'examen de la liste de nombres ci-dessus ne révèle aucun ordre parmi les nombres premiers, ils semblent apparaître de manière aléatoire, sans structure sous-jacente. Or, les nombres premiers ne sont justement pas des nombres tirés au hasard puisqu'ils obéissent à une définition précise. Ils sont les briques élémentaires qui, multipliées entre elles, vont former tous les nombres entiers. Il est donc naturel de penser qu'un certain ordre doit être présent dans la répartition des ces nombres. La mise en évidence de structures dans l'ensemble des nombres premiers est d'ailleurs activement recherchée par les mathématiciens. Certaines d'entre elles peuvent être facilement entrevues en disposant les nombres entiers en colonnes judicieusement choisies. Ci-dessous, l'ensemble des nombres entiers est placé selon une grille comportant six lignes, au sein de cette grille les nombres premiers qui figurent en gris dessinent certains alignements.



Il est clairement visible que certaines lignes sont exemptes de nombres premiers, il s'agit des quatrième et sixième lignes, auxquelles s'ajoutent, si l'on fait abstraction de la première case, de la deuxième et troisième lignes. En effet, ces lignes ne contiennent que des multiples de 2 et de 3, ainsi à l'exception de ces deux derniers nombres tous les nombres premiers sont regroupés dans la première et la cinquième ligne. Ils semblent alors former de petits paquets dont le plus long est composé des nombres 5, 11, 17, 23, 29. La présence de tels alignements, c'est-à-dire de nombres premiers régulièrement espacés, conforte l'intuition vague que la répartition de ces nombres répond à une certaine structure. La disposition des nombres entiers en tableau de six lignes s'étant révélée encourageante, il est tentant de poursuivre avec un nombre de lignes plus grand. Les dispositions les plus probantes s'obtiennent avec six, trente, deux cent dix lignes, *etc.* c'est-à-dire un nombre de lignes qui est un produit de nombres premiers consécutifs :

$$6 = 2 \times 3, \qquad 30 = 2 \times 3 \times 5, \qquad 210 = 2 \times 3 \times 5 \times 7, \qquad \textit{etc.}$$

Il se trouve en effet que de cette façon, les alignements de nombres premiers sont les plus longs comparativement au nombre de lignes utilisées. Ainsi le tableau à trente lignes comporte des paquets de six nombres premiers :



De la même manière, une grille de deux cent dix lignes laisserait apparaître des alignements de dix nombres premiers dont voici un exemple :

$$199, \quad 409, \quad 619, \quad 829, \quad 1039, \quad 1249, \quad 1459, \quad 1669, \quad 1879, \quad 2089.$$

De telles suites de nombres régulièrement espacés s'appelent des *progressions arithmétiques*, ce sont elles qui sont à l'origine des alignements que l'on observe dans les tableaux. Par exemple l'alignement mis en évidence dans l'illustration ci-dessus représente une progression arithmétique de six nombres premiers espacés d'une longueur 30 :

$$359 \xrightarrow{+30} 389 \xrightarrow{+30} 419 \xrightarrow{+30} 449 \xrightarrow{+30} 479 \xrightarrow{+30} 509.$$

La recherche d'alignements parmi les nombres premiers se résume ainsi à la recherche de progressions arithmétiques. Une telle recherche peut sembler un objectif bien modeste au regard d'une connaissance complète de la structure de l'ensemble des nombres premiers. Cet objectif est pourtant bien loin d'être atteint à l'heure actuelle, et de nombreuses questions élémentaires restent sans réponse. Par exemple on ne connaît pas à ce jour (juin 2007) d'alignements de plus de 24 nombres premiers. En effet, les grilles représentées plus haut ne figurent que les tout premiers nombres entiers et si l'on prolongeait ces grilles on observerait un éclaircissement de plus en plus important qui traduit la raréfaction des nombres premiers. Dans ces conditions, on peut s'attendre à ce que les alignements de nombres premiers se raréfient énormément et que la recherche de longs alignements soit une véritable gageure. Cette raréfaction pourrait très bien également limiter la taille des alignements : peut-on trouver des progressions arithmétiques de cent, mille ou dix-mille nombres premiers ? La question a longtemps défié les mathématiciens et ce n'est que tout récemment que Ben Green et Terence Tao en sont venus à bout. Ils ont montré qu'il existe des progressions arithmétiques de nombres premiers aussi longues que l'on veut. En clair, quel que soit le nombre de termes que l'on se donne, le théorème de Green et Tao affirme qu'il existe un alignement de nombres premiers ayant pour longueur ce nombre de termes. En particulier il existe bien des progressions arithmétiques de cent, mille ou dix mille nombres premiers.

Il y a toutefois un bémol à apporter au résultat de Green et Tao : leur théorème assure l'existence de progressions arithmétiques mais il ne donne malheureusement aucune idée de celles-ci et leur détermination concrète demeure hors d'atteinte. Ceci peut sembler bien paradoxal : comment est-il possible d'être sûr de la présence d'alignements si l'on est incapable de les trouver ? L'objectif affiché étant de détecter une certaine régularité dans un ensemble – celui des nombres premiers – l'idée est de prendre le problème à l'envers et de se demander quels sont, parmi tous les ensembles de nombres entiers, ceux qui possèdent des suites de nombres régulièrement espacés. Cette formulation, bien plus générale et donc, *a priori*, bien plus difficile, ouvre pourtant une nouvelle perspective : s'il s'avérait par exemple que tous les ensembles possédent obligatoirement de telles progressions arithmétiques alors il en serait de même pour l'ensemble des nombres premiers. La présence d'alignements dans les grilles ci-dessus n'aurait donc pas à être interprétée

comme propriété particulière des nombres premiers mais comme une propriété universelle vraie pour n'importe quel ensemble de nombres. Tel n'est cependant pas le cas, il existe de nombreux ensembles qui ne possèdent pas de progressions arithmétiques, par exemple l'ensemble composé de tous les nombres qui sont des puissances de 2 :

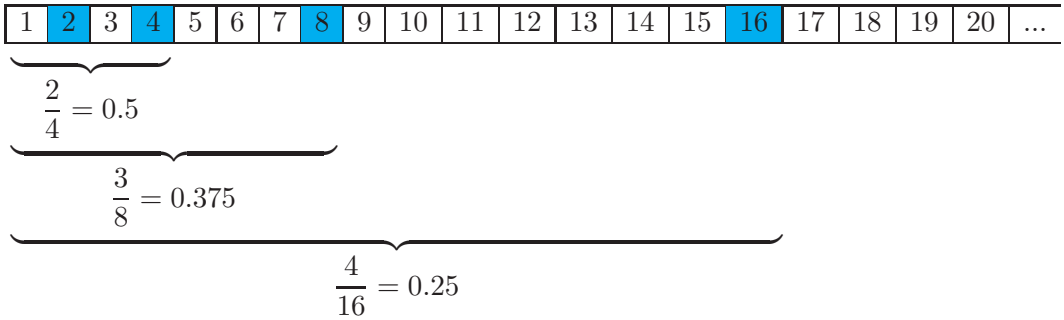
$$2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 32,\ 64,\ 128,\ 256,\ \ldots$$

En effet dans cet ensemble, entre un nombre et son suivant, il y a plus d'écart, qu'entre ce nombre et n'importe lequel de ceux qui le précèdent. Par conséquent il est impossible de trouver ne serait-ce que trois nombres régulièrement espacés dans l'ensemble des puissances de 2. A l'extrême inverse, il existe des ensembles qui sont d'une très grande régularité, comme par exemple l'ensemble des nombres impairs :

$$1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 11,\ 13,\ 15,\ 17,\ 19,\ \ldots$$

Cet ensemble étant constitué d'une progression arithmétique indéfiniment prolongée, il contient bien entendu des progressions arithmétiques de toutes longueurs. Comme on le constate, il n'y a pas de règle générale, certains ensembles en possèdent et d'autres non mais il n'est pas toujours aussi facile de les distinguer. Cependant, en 1975, le mathématicien Endre Szémerédi a découvert un procédé qui permet d'affirmer qu'un ensemble donné possède des progressions arithmétiques de toutes longueurs. Ce procédé repose sur le calcul d'un nombre appelé *densité* de l'ensemble. Si on représente l'ensemble en question au moyen de cases grises disposées sur une grille, la densité est *grosso modo* le rapport entre le nombre de cases grises et le nombre total de cases. On dit par exemple que la densité de l'ensemble des nombres impairs vaut $\frac{1}{2}$.

En général pour des ensembles plus compliqués, la densité ne s'obtient pas de manière aussi directe et sa détermination demande plus d'effort. Voici, sur l'exemple des puissances de 2 comment l'on procède :



On écrit à chaque étape le rapport du nombre de cases grises sur le nombre de cases considérées. La valeur obtenue à la limite est par définition la densité de l'ensemble. Ici

les trois premières étapes font apparaître les valeurs 0.5, 0.375 et 0.25, la poursuite de ce procédé donnerait successivement 0.15625, 0.09375, 0.05468... etc. À la limite, on obtiendrait la valeur 0. La densité de l'ensemble des puissances de 2 est donc zéro. On constate au passage qu'un ensemble comportant une infinité de nombres peut avoir une densité égale à zéro, ceci traduit le fait que les éléments de cet ensemble sont de plus en plus clairsemés parmi les nombres entiers. Intuitivement, on se rend bien compte qu'un ensemble très clairsemé a bien moins de chances de contenir des progressions arithmétiques qu'un ensemble plus dense. Le théorème de Szémérédi établit un lien entre la densité d'un ensemble et la présence de progressions arithmétiques, il s'énonce :

Théorème de Szémérédi. – *Si un ensemble a une densité qui n'est pas égale à zéro, alors on peut y trouver des progressions arithmétiques aussi longues que l'on veut.*

Ce théorème signifie que si les éléments d'un ensemble ne sont pas trop dispersés, alors celui-ci contient forcément des progressions arithmétiques de n'importe quelle longueur. Il va donc bien au-delà de ce que l'on pressentait puisqu'il peut s'appliquer à des ensembles de densité extrêmement faibles et garantir dans ceux-ci la présence de suites de nombres régulièrement espacés de la longueur que l'on souhaite. Par exemple, même si la densité de l'ensemble n'est que de 0.01 – en moyenne une case sur cent est grisée dans la liste des entiers – on y trouvera forcément des progressions arithmétiques de mille, dix mille ou même un milliard d'éléments. L'intérêt du théorème de Szémérédi est donc qu'il prédit une certaine structure dans un ensemble dès que sa densité dépasse zéro ; même si les éléments sont choisis *au hasard*, une certaine régularité sera inévitablement présente dans l'ensemble ainsi fabriqué. Pour saisir la force de ce théorème, il faut se rendre compte que la disposition des éléments d'un ensemble peut être extrêmement désordonnée. L'exemple qui suit montre comment on peut construire à partir d'un ensemble très régulier, un ensemble désordonné de même densité.

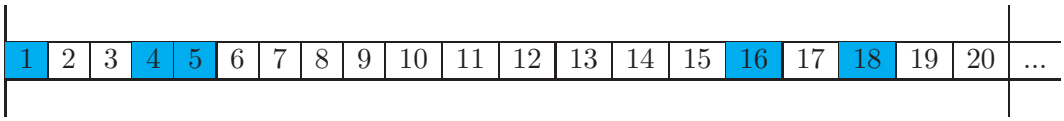
1	2	3	**4**	5	6	7	**8**	9	10	11	**12**	13	14	15	**16**	17	18	19	**20**	...

Partant d'une densité donnée, par exemple 0.25, on commence par disposer les éléments de la façon la plus régulière qui soit. Afin d'introduire du désordre dans cet ensemble, tout en préservant une densité de $\frac{1}{4}$, on déplace les cases grises de l'illustration ci-dessus tout en veillant à ce qu'il y en ait une seule dans chaque barrette de quatre cases.

1	2	**3**	4	5	6	**7**	8	9	**10**	11	12	13	14	**15**	16	**17**	18	19	20	...

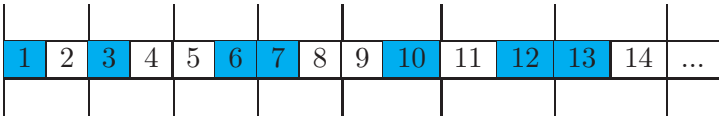
Il n'est déjà plus évident qu'il existe dans cet ensemble des progressions arithmétiques de toutes longueurs. On peut encore compliquer les choses en jouant par exemple sur des barrettes de vingt cases au lieu de quatre, ce sont alors cinq cases grises qui sont réparties au hasard dans chaque barrette. La densité d'un tel ensemble est toujours égale

à $\frac{1}{4}$ et malgré sa complexité apparente, la présence de régularité est encore assurée par le théorème de Szémerédi.



Il est temps maintenant de revenir au problème initial, à savoir la recherche d'une certaine forme de régularité dans l'ensemble des nombres premiers. Le théorème de Szémerédi permet de prendre de la hauteur par rapport à ce problème puisqu'il répond à une question plus générale : peut-on trouver un peu de structure dans des ensembles très désordonnés ? Sous une condition étonnamment faible – une densité qui n'est pas égale à zéro – la réponse est affirmative. Il suffit donc d'être capable de montrer que la densité des nombres premiers n'est pas zéro, pour en déduire automatiquement l'existence de progressions arithmétiques de toutes longueurs. Il s'avère toutefois que l'ensemble des nombres premiers a une densité égale à zéro, c'est un résultat célèbre connu depuis 1808 et que les mathématiciens appellent le théorème de raréfaction de Legendre. Et précisément le théorème de Szémerédi ne dit rien sur les ensembles dont la densité vaut zéro, de tels ensembles peuvent très bien contenir des progressions arithmétiques ou n'en contenir aucune. Par conséquent, au moyen du théorème de Szémerédi, on ne peut rien conclure sur la régularité de l'ensemble des nombres premiers.
Quels sont, malgré tout, les enseignements que l'on peut tirer de cette étude ? Tout d'abord, un renversement de perspective : plutôt que de se focaliser sur l'ensemble des nombres premiers, on travaille sur tous les ensembles qui contiennent des progressions arithmétiques et on se demande si celui des nombres premiers en fait partie. Ce renversement conduit à penser que la présence de régularité dans l'ensemble des nombres premiers pourrait résulter d'un théorème valable pour toute une catégorie d'ensembles dont celui des nombres premiers. Il fournit une voie d'attaque qui consisterait à « raffiner »le théorème de Szémerédi jusqu'à ce qu'il puisse s'appliquer à une catégorie d'ensemble suffisamment large pour englober celui des nombres premiers. C'est justement grâce à un tel raffinement que les mathématiciens Green et Tao ont réussi en 2006 à prouver cette présence de régularité.

Quel est le rapport de tout ceci avec le problème de Kakeya ? Il apparaît justement lorsque l'on s'intéresse de plus près au théorème de Szémerédi, par exemple lorsque l'on se demande à quels endroits les progressions arithmétiques vont figurer. Autrement dit, on ne se contente plus de se demander s'il existe une progression arithmétique, on veut aussi savoir où la chercher. La réponse est relativement aisée si l'ensemble lui-même n'est pas trop compliqué. À titre d'illustration si on construit un ensemble de densité 0.5 en choisissant une case dans chaque barrette de deux cases, on constate alors qu'il est impossible de cocher plus de six cases sans qu'apparaissent trois cases régulièrement espacées.



Le dessin ci-dessus représente une configuration où il faut attendre la septième case grisée pour qu'une progression arithmétique voie le jour :

$$1 \xrightarrow{+6} 7 \xrightarrow{+6} 13$$

On dit pour cet exemple que le nombre 7 est la borne qui garantit la présence de trois nombres en progression arithmétique : dès que sept cases sont cochées, une telle progression est immanquablement apparue. Si l'ensemble envisagé est plus compliqué, il faut en général cocher bien plus de sept cases pour avoir la certitude de rencontrer de telles suites. Les bornes sont alors des nombres astronomiquement grands. En 1999, le mathématicien Jean Bourgain a mis en évidence un lien entre ces nombres et le problème de Kakeya. Cette découverte importante lui a permis d'effectuer une avancée significative à propos de la conjecture de Kakeya.

Selon cette conjecture, une figure qui contient l'aiguille dans toutes les directions, fût-elle de volume nul, possède une dimension fractale égale à la dimension de l'espace dans lequel on se place. Par exemple dans l'espace ambiant à trois dimensions, la conjecture prévoit une dimension fractale égale à trois. Ce résultat ne résout pas la conjecture mais permet de donner un nombre qui minore la dimension fractale. Pour la dimension trois, ce nombre vaut 2.04 ce qui signifie que la dimension fractale est nécessairement plus grande que 2.04. Le tableau suivant met en parallèle, pour d'autres dimensions, les prévisions de la conjecture et les résultats obtenus par Jean Bourgain.

	Selon la conjecture	Résultat de Bourgain
En dimension 4	4	2.56
En dimension 5	5	3.08
En dimension 10	10	5.68
En dimension 100	100	52.48

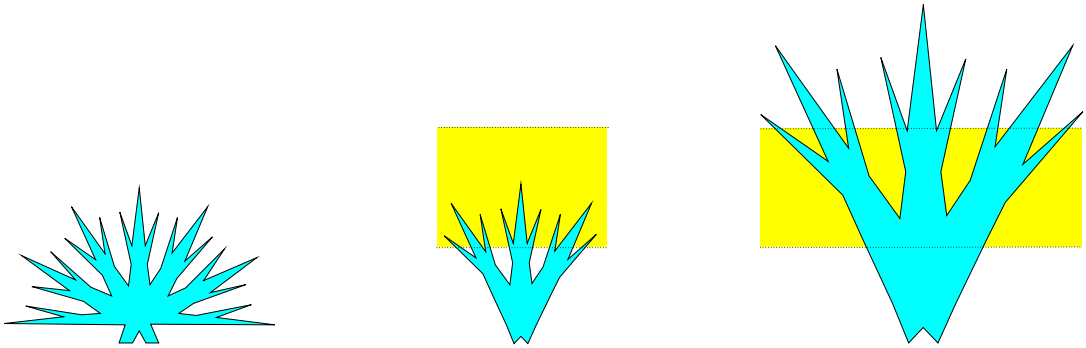
Ces derniers répondent tous à la formule : $0.52 \times \text{dimension} + 0.48$, qui assure une dimension fractale légèrement supérieure à la moitié de celle que l'on recherche. C'est une avancée remarquable qui a été rendue possible par la découverte d'un lien tout à fait inattendu entre la dimension fractale de la figure de Besicovitch et les régularités décrites par Szémerédi dans les ensembles de nombres.

L'approche de Bourgain

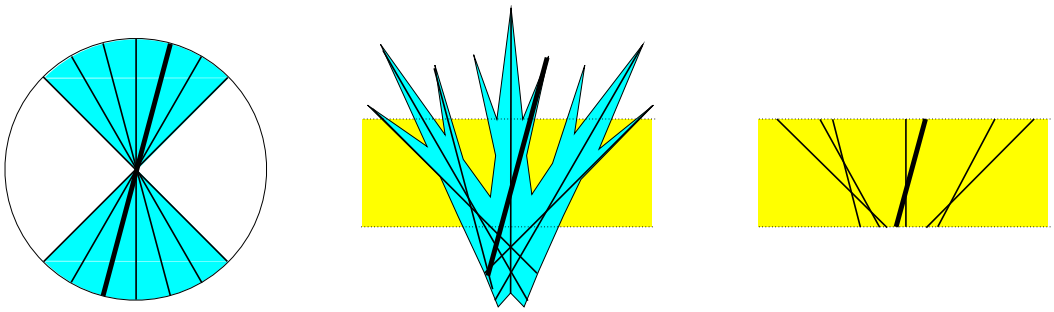
Le cheminement mathématique qui, partant du problème de Kakeya conduit au progressions arithmétiques de nombres est loin d'être évident et, par souci d'être accessible, il sera présenté dans le cadre de la dimension deux. Comme on l'a vu, dans ce cas très particulier la conjecture n'en est plus une, le mathématicien Davis a en effet montré dès 1971 que la dimension fractale d'une figure de Besicovitch dans le plan est maximale, autrement dit qu'elle vaut deux. Les idées qui vont être présentées ici sont néanmoins valides pour les

dimensions plus grandes où le problème se pose réellement.

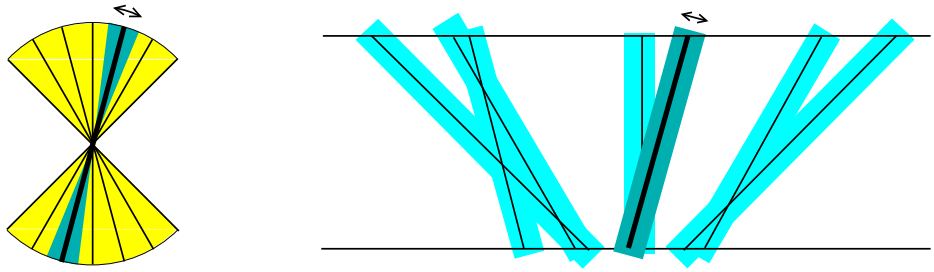
Tout débute avec une figure de Besicovitch, c'est-à-dire un domaine contenant l'aiguille dans toutes les directions possibles. Comme précédemment la représentation d'un tel domaine sera plus illustrative que fidèle, mais, même imparfaites, ces représentations sont indispensables pour soutenir le raisonnement. La première étape dans la démarche de Bourgain est justement de présenter la figure de Besicovitch sous une forme où elle sera plus facilement manipulable. Cela commence par deux remarques intuitives : premièrement on peut se contenter pour déterminer la dimension de ne s'intéresser qu'à une portion de la figure. Dans notre cas on choisit de préserver une portion qui ne contient que des aiguilles assez verticales. Cela revient en gros à conserver la moitié de la figure, c'est-à-dire comme le montre l'illustration ci-dessous, à se restreindre à la partie centrale de l'arbre.



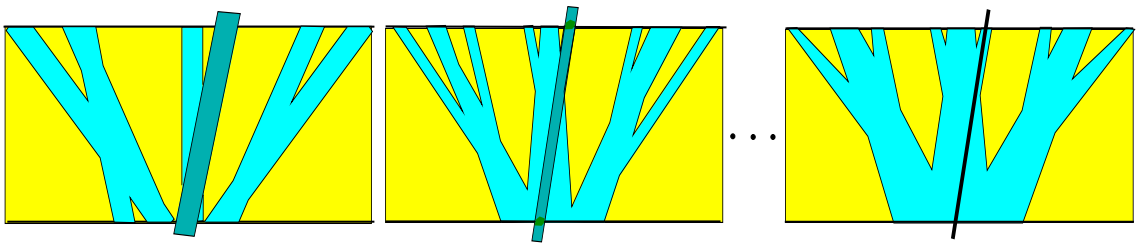
La seconde remarque est que la dimension est insensible à une dilatation de la figure. On peut donc indifféremment agrandir ou rétrécir celle-ci sans que sa dimension n'en soit affectée. Si on se donne une bande bordée par deux droites horizontales, comme celle représentée ci-dessus dans l'illustration du milieu, il est possible d'augmenter la figure de manière à ce que toutes les aiguilles qui la composent coupent cette bande de part en part. Ceci est réalisable car on a justement pris soin précédemment de ne considérer que la portion de figure contenant des aiguilles assez verticales, comme représenté à droite sur l'illustration précédente. On réduit de nouveau la portion de figure dont on étudie la dimension à la zone recouverte par la bande horizontale. Cette réduction, une fois encore, n'affecte pas la dimension de la figure.



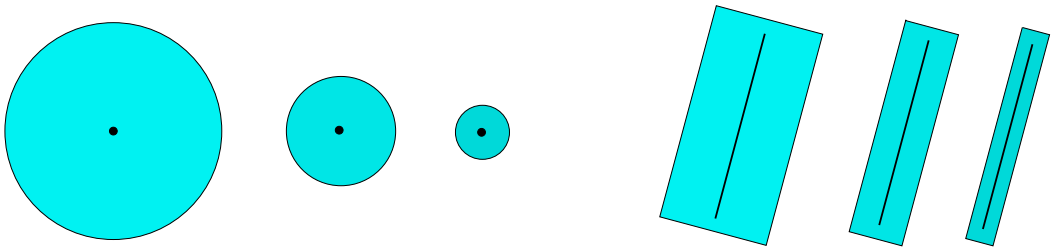
Parmi l'infinité des aiguilles qui composent cette dernière, on en sélectionne quelques unes dont les *directions* sont régulièrement espacées. Cela signifie que, si l'on reporte dans un disque les aiguilles ainsi sélectionnées, elles se répartiront uniformément dans le secteur où elles se trouveront. Dans l'illustration ci-dessus, les directions de sept aiguilles ont été ainsi représentées dans un disque, puis les aiguilles elles-mêmes ont été mises en évidence à l'intérieur de la figure de Besicovitch. Enfin on dépouille cette dernière de toutes les autres aiguilles et on la restreint à la bande horizontale pour n'obtenir plus qu'une collection de sept segments reliant les bords de la bande. L'étape suivante consiste à « épaissir » chaque segment en un rectangle dont la largeur correspond à l'espacement des directions des aiguilles à l'intérieur du disque. Le résultat de cette opération est illustré ci-dessous.



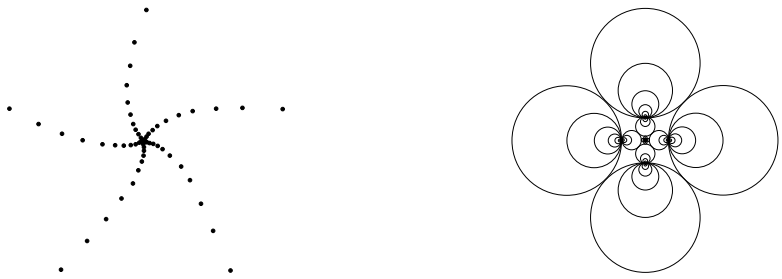
Un des intérêts de cet ensemble de rectangles est qu'il fournit, à l'intérieur de la bande considérée, une approximation de la figure de Besicovitch. Ceci peut paraître surprenant au vu du dessin ci-dessus mais ce n'est dû qu'au tout petit nombre d'aiguilles que l'on a sélectionnées. Une augmentation progressive de ce nombre, c'est-à-dire un choix d'espacement de plus en plus petit pour les directions, conduit à des figures qui approchent de mieux en mieux celle de Besicovitch.



N'oublions pas que notre objectif est de déterminer la dimension d'un ensemble de Besicovitch. Bien que la détermination d'une dimension fractale soit une opération mathématique délicate, le principe dont il dépend est quant à lui parfaitement accessible. Pour les figures du plan ce dernier repose sur une succession de calculs d'aire. L'idée est d'épaissir l'objet dont on désire connaître la dimension puis de faire diminuer cet épaississement en calculant l'aire à chaque étape. La façon dont l'aire diminue donne *grosso modo* la dimension de l'objet de départ : plus cette aire diminue vite, plus la dimension est petite.

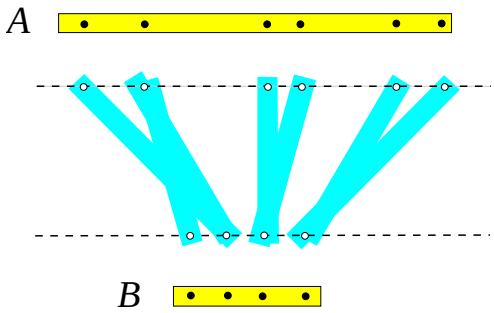


Le dessin ci-dessus représente l'épaississement d'un point et d'un segment de droite, on observe que chaque division par deux de cet épaississement se traduit par une aire divisée par quatre dans le cas du point et par deux dans le cas du segment. Cette aire diminue donc beaucoup plus vite pour le point que pour le segment, et l'on sait bien que la dimension de la ligne, égale à un, est plus grande que celle du point qui vaut zéro. Les mathématiciens exploitent ce phénomène et ont des formules qui permettent, en mesurant la vitesse de la décroissance de l'aire, de calculer précisément une dimension. Bien sûr ces formules ne sont pas nécessaires pour des objets aussi simples qu'un point ou une droite, mais pour des figures plus complexes, elles deviennent inévitables. C'est en particulier le cas pour des figures composées d'un même objet qui se répète à l'infini en s'accumulant dans certaines zones du plan. Par exemple, dans les dessins ci-dessous, ce sont des points et des cercles qui par leur amoncellement font apparaître des zones plus denses susceptibles d'augmenter la dimension. Pour trancher il est alors indispensable de procéder à un calcul rigoureux de dimension. Un tel calcul montrerait pour les figures en question, que ces zones denses n'augmentent pas la dimension, celle-ci demeurant donc égale à zéro pour l'illustration de gauche ci-dessous et à un pour celle de droite.

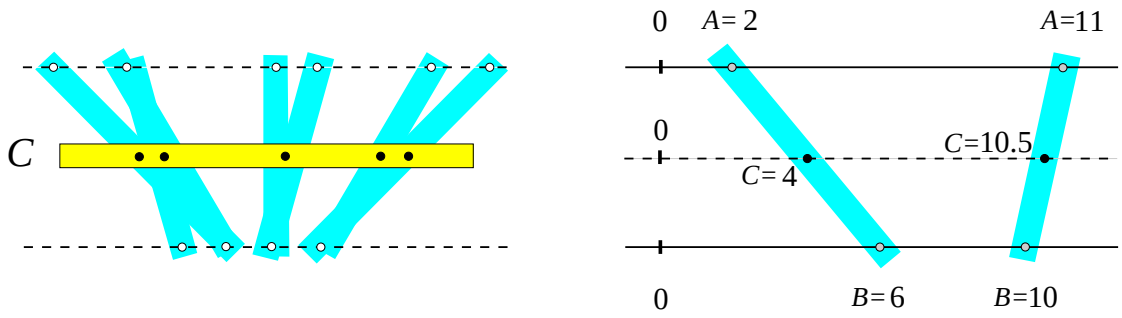


On veut montrer que la dimension d'un ensemble de Besicovitch est « grande », il faut donc montrer que l'aire d'un épaississement ne décroît pas trop vite, c'est-à-dire, pour faire simple, ne soit pas trop petite. Le problème passe donc par une évaluation de l'aire des figures qui approximent l'ensemble de Besicovitch entre les deux droites. Une étude mathématique montre que cette aire est reliée aux longueurs des zones d'intersection des aiguilles épaissies avec les droites. Ces longueurs s'évaluent en comptant des points régulièrement répartis sur lesdites zones. Dans le dessin ci-dessous, on dénombre six points au niveau supérieur et seulement quatre au niveau inférieur, la différence étant due aux intersections entre les rectangles. Les points du haut sont réunis en un ensemble que l'on appelle $\mathcal{A}$ et ceux du bas en un autre ensemble $\mathcal{B}$. A mesure que l'on approche l'ensemble de Besicovitch par

des rectangles de plus en plus fins donc de plus en plus nombreux, les ensembles $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ vont contenir un nombre de points de plus en plus grand mais toujours inférieur à celui des rectangles à cause des multiples intersections que ces derniers forment entre eux. Tout le problème est ensuite d'estimer la façon dont les ensembles $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ grandissent : plus leur croissance est rapide, plus la dimension sera grande. En fait on peut montrer que leur croissance est comparable et pour simplifier l'explication on va supposer que, dans le cas où les rectangles se font nombreux, ces deux ensembles ont le même nombre d'éléments.

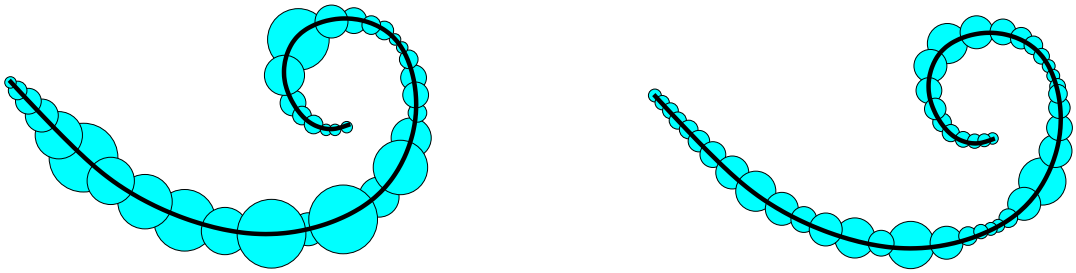


Plutôt que de s'intéresser à $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ on aurait tout aussi bien pu envisager n'importe quelle autre droite intermédiaire à l'intérieur de la bande horizontale. Il se trouve qu'en considérant précisément la droite centrale, sur laquelle on forme l'ensemble $\mathcal{C}$ représenté ci-dessous, un phénomène mathématique dit « combinatoire » a lieu et donne un lien entre les nombres d'éléments de $\mathcal{A}$, de $\mathcal{B}$ et de $\mathcal{C}$ et le nombre d'aiguilles en présence. Ce lien va imposer aux ensembles $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ une certaine vitesse de croissance, ce qui est le but recherché si l'on souhaite montrer que la dimension n'est pas trop faible. Une des clefs de ce lien est que l'ensemble $\mathcal{C}$ n'est pas indépendant des ensembles $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$; on le retrouve en faisant des moyennes entre des éléments de $\mathcal{A}$ et de $\mathcal{B}$ comme le montre le dessin ci-dessus. Par exemple sur l'aiguille la plus à gauche, le point A est repéré par sa position sur l'horizontale, il se trouve à deux unités d'une origine choisie arbitrairement. Le point B de l'aiguille, lui, est à six unités, le point C qui est au milieu de A et de B se trouve donc à quatre unités, ce qui est la demi-somme de deux et de six. De la même façon chaque élément de $\mathcal{C}$ s'obtient en effectuant une demi-somme d'éléments de $\mathcal{A}$ et de $\mathcal{B}$.

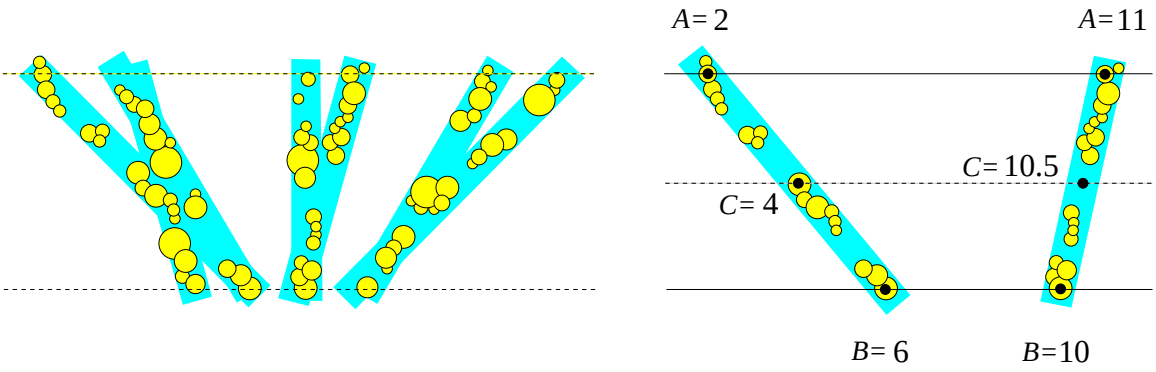


Pourquoi introduire un tel ensemble $\mathcal{C}$ alors que ce sont les ensembles $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ dont on veut estimer la vitesse de croissance avec l'espoir qu'elle soit la plus grande possible ? Une idée

souvent fructueuse pour résoudre une question mathématique est de supposer l'inverse de la conclusion espérée puis de travailler sur le problème jusqu'à mettre en évidence des éléments en contradiction avec cette supposition. Ici, si l'on imagine que les ensembles $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ ont une croissance lente alors c'est justement de la considération de l'ensemble $\mathcal{C}$ que va naître la contradiction. Cependant le cheminement qui y conduit est une des parties les plus délicates de la démonstration, il est fondé sur un théorème des mathématiques qui donne une liaison entre le nombre d'éléments de $\mathcal{A}$, de $\mathcal{B}$ et de $\mathcal{C}$ d'une part et le nombre d'aiguilles d'autre part. Au fur et à mesure des étapes, $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ ont des tailles de plus en plus comparables, et comme le nombre d'aiguilles ne fait qu'augmenter, la liaison donnée par le théorème interdit à ces trois ensembles d'avoir une croissante lente.



En réalité connaître la façon dont l'aire des épaississements rectangulaires évolue n'est malheureusement pas suffisant pour calculer la dimension fractale d'un objet. En effet il faut que cette connaissance porte non seulement sur des épaississements réguliers de l'objet en question mais également sur tous ceux que l'on peut obtenir avec des disques de tailles disparates. Le dessin ci-dessus représente deux épaississements de tailles différentes qui recouvrent une simple courbe. En examinant la façon dont les rayons de ces disques évoluent lorsque ceux-ci se resserrent autour de l'objet, les mathématiciens en déduisent par des formules savantes sa dimension fractale. Dans l'illustration, cette dimension est égale à un, mais pour d'autres objets elle peut donner toutes sortes de nombres plus compliqués. Nous en avons rencontré quelques uns au chapitre précédent, comme l'*île de Gosper* dont la dimension est de 1.12915... ou encore le triangle évidé dont la dimension est de 1.72367... Pour le problème de Kakeya, la considération de ces assemblages de disques de toutes tailles est source de difficultés supplémentaires car cela multiplie à l'infini le nombre de façons d'épaissir la figure de départ. Néanmoins les mathématiciens ont réussi à s'affranchir des innombrables problèmes causés par cette multiplicité infinie et sont parvenus à se ramener à une situation très similaire à celle des épaississements réguliers. Dans cette nouvelle situation, il faut considérer non pas tous les disques de l'épaississement mais seulement ceux qui sont contenus dans une certaine fourchette de taille. On superpose ensuite cette collection de disques aux épaississements rectangulaires des aiguilles comme le montre l'illustration ci-dessous.



La démarche suivie est alors la même que pour celle des rectangles, à une différence près cependant : l'aire que l'on cherche à évaluer est celle des parties de rectangles couvertes par les disques (en gris foncé sur le dessin). Comme précédemment, la clé du raisonnement provient de l'étude des ensembles $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ issus des intersections de la zone en gris foncé avec les trois horizontales. Mais cette fois-ci, le domaine qui nous intéresse étant disséminé, rien ne garantit que les extrémités et les centres des aiguilles en fassent partie. Par exemple, sur le dessin de droite, le centre de la deuxième aiguille n'est pas dans la zone en gris foncé. Et si l'on veut estimer l'aire comme précédemment, il est nécessaire de savoir quel est le nombre d'aiguilles dont les extrémités et le centre font partie du domaine considéré. C'est justement ici qu'interviennent les progressions arithmétiques. En effet, compter de telles aiguilles revient à dénombrer les progressions arithmétiques de trois éléments. Dans le dessin de droite figurent deux progressions arithmétiques :

$$2 \xrightarrow{+2} 4 \xrightarrow{+2} 6 \qquad\qquad 10 \xrightarrow{+0.5} 10.5 \xrightarrow{+0.5} 11$$

mais seule la première correspond à une aiguille dont les extrémités et le centre sont dans la zone en gris foncée. En fin de compte, tout le problème se résume à estimer le nombre de progressions arithmétiques d'un ensemble (en gris foncé) situé à l'intérieur d'un épaississement rectangulaire d'aiguilles (gris clair). Cet ensemble possède une certaine *densité* qui représente simplement la proportion qu'il occupe à l'intérieur des rectangles. On est donc bien ramené à la question des progressions arithmétiques dans un ensemble d'une certaine densité...

Au delà des progrès dont il est la source, ce lien entre la recherche de régularité dans les ensembles et le problème de Kakeya, illustre un fait souvent remarqué en sciences : la solution d'un problème passe parfois par des détours inattendus, les régularités étudiées par Szémerédi dans le cadre des nombres premiers ont finalement abouti à une avancée significative sur la question de Kakeya. Cette découverte montre une fois de plus que les mathématiques ne se réduisent pas à un exercice dénué d'imagination mais qu'elles sont bien au contraire une science vivante où l'invention tient une place primordiale. La mise au jour de ces liens secrets, comme autant de fils invisibles au regard des hommes éclaire de façon extraordinaire des pans entiers de la science ; la joie et l'émerveillement suscités par

leur découverte est un peu semblable à celle du paléontologue lorsqu'un ≪ chaînon manquant ≫ entre deux espèces bien distinctes est enfin délivré de sa gangue de roche. Quant à la question de Kakeya, le lien étonnant avec les progressions arithmétiques ne marque pas le bout de nos surprises puisqu'une connexion, plus fascinante encore, a été découverte par Jean Bourgain entre cette question et l'énigme la plus célèbre des mathématiques : la très mystérieuse *hypothèse de Riemann*. Cette hypothèse, dont les mathématiciens tentent de percer le secret depuis cent cinquante ans, offrirait rien moins, si elle était résolue, que la compréhension des nombres premiers !

Les connexions insoupçonnables du problème de Kakeya avec les questions les plus profondes des mathématiques sont la source de l'intérêt sans cesse renouvelé que les mathématiciens lui portent. Qui aurait pu imaginer un tel destin pour une question aussi innocente ? C'est là toute la magie des mathématiques qu'une interrogation sur une simple aiguille, une fois soulevée, puisse être le point de départ d'une quête touchant aux plus grands mystères de la connaissance humaine.

Remerciements

Nous remercions chaleureusement toutes les personnes qui nous ont soutenus, réconfortés et aidés dans ces longues années de rédaction : Sophie et Sarah, Régis Goiffon, Damien Gayet, Stéphane Lamy, Bruno Sévenec, Jean-François Quint et Bruno Yvonnet qui a généreusement prêté ses mains et ses outils pour la réalisation des « pieds de chapitres ».

Quatrième de couverture

Equations, formules, dérivées... cauchemars ou captivantes énigmes ? Découvrez ou redécouvrez les grandes idées qui font la force des mathématiques en suivant l'incroyable destinée de la question de Kakeya. Ou comment une devinette apparemment enfantine a pu croître et se ramifier jusqu'à se transformer en un véritable défi lancé aux plus grands cerveaux de notre temps ?

Conçu comme une pérégrination autour de la question de Kakeya ce livre expose clairement et concrètement le pourquoi et le comment des résultats mathématiques, les grandes idées y sont progressivement présentées au gré des rebondissements de l'histoire. L'accent est mis sur la dérivation et le calcul intégral qui posent tant de problèmes aux lycéens et aux étudiants. Présentées en contexte, ces notions incontournables deviennent enfin évidentes et donnent accès au génie de leurs découvreurs.

Aux antipodes du cours rébarbatif, ce voyage au cœur des mathématique d'aujourd'hui entraînera le lecteur vers un monde étrange et paradoxal où il sera confronté à de mystérieuses surfaces sans aires, à un surgissement inattendu du chaos ainsi qu'aux insaisissables quatrième et cinquième dimension...

Ce livre est destinée aux lycéens et aux étudiants désireux de saisir davantage le sens réel des notions qui leur sont enseignées, il conviendra également à toutes les personnes ayant un bagage scientifique ou technique qui voudraient comprendre la portée des mathématiques, il s'adresse plus généralement à tous les esprits curieux qui souhaitent voir les mathématiques sous un jour différent.